

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MATEUS RAUEN

UMA FORMULAÇÃO ENRIQUECIDA PARA A ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA  
APLICADA AOS PROBLEMAS DA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

CURITIBA

2020

MATEUS RAUEN

UMA FORMULAÇÃO ENRIQUECIDA PARA A ANÁLISE ISOGOMÉTRICA  
APLICADA AOS PROBLEMAS DA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências. Área de Concentração: Mecânica Computacional

Orientador: Dr. Roberto Dalledone Machado

Coorientador: Dr. Marcos Arndt

CURITIBA

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE – SIBI/UFPR

---

R243f

Rauen, Mateus

Uma formulação enriquecida para a análise isogeométrica aplicada aos problemas da dinâmica das estruturas [recurso eletrônico]/ Mateus Rauen. Curitiba, 2020.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências. Sub-área: Mecânica Computacional.

Orientador: Dr. Roberto Dalledone Machado

Coorientador: Dr. Marcos Arndt

1. Vibração. 2. Método dos elementos finitos. 3. Engenharia auxiliada por computador. I. Machado, Roberto Dalledone. II. Arndt, Marcos. III. Título. IV. Universidade Federal do Paraná.

CDD 531.32

---

Bibliotecária: Vilma Machado CRB9/1563



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS  
EM ENGENHARIA - 40001016030P0

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **MATEUS RAUEN** intitulada: **Uma Formulação Enriquecida para a Análise Isogeométrica Aplicada aos Problemas da Dinâmica das Estruturas**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO DALLEDONE MACHADO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Maio de 2020.

MARCOS ARNDT  
Presidente da Banca Examinadora

JUCÉLIO TOMÁS PEREIRA  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

ANDRÉ JACOMEL TORII  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DA  
INTEGRAÇÃO LATINO AMERICANA)

JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER  
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

EVANDRO PARENTE JUNIOR  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ)

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus orientadores Prof. Roberto Dalledone Machado e Prof. Marcos Arndt por todo o auxílio neste caminho de conhecimento.

Aos meus pais Luiz Antonio Rauen e Siomara Preisler Rauen e aos meus irmãos Ramon Rauen e Jordana Rauen pelo carinho e apoio.

A todos os amigos e colegas que estiveram presente no tempo dessa jornada.

*"Se você quer descobrir os segredos do universo,  
pense em termos de energia, frequência e vibração"*  
*(Nikola Tesla)*

## RESUMO

A dinâmica estrutural estuda a resposta dos meios sólidos decorrentes de excitações transientes. Muitos problemas reais de dinâmica estrutural não possuem resposta analítica, sendo o uso de soluções numéricas uma alternativa largamente utilizada. Dentre tais métodos destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) por sua robustez e uso consolidado na resolução de problemas estruturais e suas versões enriquecidas baseadas no Método da Partição da Unidade (MPU), como o Método dos Elementos Finito Generalizados (MEFG). A Análise Isogeométrica (AIG) surgiu com a vantagem de efetuar mapeamentos de malha diretamente de uma geometria modelada via CAD e, como em outras áreas, também apresentou bons resultados na dinâmica estrutural. Entretanto as formulações e experimentos numéricos da junção entre a AIG e os métodos enriquecidos ainda não é bem explorada na literatura. Este trabalho apresenta uma formulação da AIG com enriquecimento, denominada PUAIG, para a dinâmica estrutural de elementos unidimensionais e bidimensionais. Os conceitos básicos de análise dinâmica e dos métodos numéricos, bem como da AIG pura são abordados. As formulações variacionais para os problemas dinâmicos são desenvolvidas e detalhes sobre a formulação da PUAIG são apresentados. Através de exemplos numéricos para barras, vigas, treliças, estado plano de tensões e membranas, a PUAIG é validada e seus resultados são comparados com o MEF, a AIG e o MEFG. Conclui-se que a PUAIG melhora os resultados numéricos da AIG em termos de acurácia e taxa de convergência nos problemas testados, e mostra-se muito competitiva com as formulações do MEFG para a dinâmica estrutural.

Palavras-chave: Dinâmica Linear, Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Análise Isogeométrica, Análise Isogeométrica Enriquecida

## **ABSTRACT**

Structural dynamics studies the motion in solid media from time excitations. Several real problems generally does not present analytical solution. The use of numerical solutions is a widely used alternative. Among such methods the finite element method (FEM) stands out by its robustness, and also its enriched versions based in Partition of Unity Method (PUM), as the Generalized Finite Element Method (GFEM), which obtained promising results in terms of accuracy and convergence in structural dynamics problems. Isogeometric Analysis (IGA) appeared with the advantage to create mesh mapping directly from a CAD model and also presented good results in structural dynamics, however formulations and experiments involving IGA and the enriched procedures are not yet explored in literature. This work presents a formulation of IGA with enrichment strategies, referred here as PUIGA, for structural dynamics of unidimensional and bidimensional elements. The basic concepts of structural dynamics and numerical methods, as well as IGA concepts are addressed. The variational formulations for dynamic problems are developed and details about PUIGA formulation are presented. Through numerical examples for bars, beams, trusses, plane state and membranes, PUIGA is validated and its results are compared with FEM, IGA and GFEM. It concludes that PUIGA can improve the numerical results of pure IGA and shows very competitive with GFEM formulation to structural dynamics problems.

Keywords: Linear Dynamics, Finite Element Method, Generalized Finite Element Method, Isogeometric Analysis, Enriched Isogeometric Analysis



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – SISTEMA MASSA-MOLA COM UM GRAU DE LIBERDADE .....	33
FIGURA 2 – EXEMPLO DE DISCRETIZAÇÃO PARA UM MODELO DE BARRA	34
FIGURA 3 – REFINAMENTO DE MALHA EM UM PROBLEMA DISCRETO .....	38
FIGURA 4 – ESQUEMA DE FORMAÇÃO DE MALHA DO MEF .....	39
FIGURA 5 – ESQUEMA DE FORMAÇÃO DE MALHA DA AIG .....	49
FIGURA 6 – FUNÇÕES BASE B-SPLINES COM $P = 2$ E $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$ .....	51
FIGURA 7 – FUNÇÕES BASE B-SPLINES COM $P = 2$ E $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$ .....	52
FIGURA 8 – EXEMPLO DE SUPERFÍCIES BASE B-SPLINES .....	54
FIGURA 9 – EXEMPLO DE CURVA NURBS .....	56
FIGURA 10 – EXEMPLO DE SUPERFÍCIE NURBS .....	57
FIGURA 11 – EXEMPLO DE FUNÇÕES BASE NO REFINAMENTO $H$ .....	58
FIGURA 12 – EXEMPLO DE FUNÇÕES BASE NO REFINAMENTO $P$ .....	59
FIGURA 13 – EXEMPLO DE FUNÇÕES BASE NO REFINAMENTO $K$ .....	60
FIGURA 14 – EXEMPLO DE UM REFINAMENTO PARA CURVAS NURBS .....	60
FIGURA 15 – EXEMPLO DE UM REFINAMENTO PARA SUPERFÍCIES NURBS	61
FIGURA 16 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO MEF PARA O PROBLEMA DE BARRA .....	67

FIGURA 17 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO AIG PARA O PROBLEMA DE BARRA .....	68
FIGURA 18 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO MEFG PARA O PROBLEMA DE BARRA .....	69
FIGURA 19 – ERROS RELATIVOS DOS DOIS PRIMEIROS AUTOVALORES DO PROBLEMA DE BARRA .....	70
FIGURA 20 – DIAGRAMA DE CORPO LIVRE E GRAUS DE LIBERDADE DINÂMICOS EM UM ELEMENTO DE BARRA .....	72
FIGURA 21 – ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI .....	78
FIGURA 22 – TRANSFORMAÇÃO PARA COORDENADAS GLOBAIS DE UM GRAU DE LIBERDADE .....	82
FIGURA 23 – ESTRATÉGIA DE IMPLEMENTAÇÃO DO MEFG .....	94
FIGURA 24 – ESTRATÉGIA DE IMPLEMENTAÇÃO DA PUAIG .....	94
FIGURA 25 – EXEMPLO DE ESTRATÉGIA DE ENRIQUECIMENTO GLOBAL PARA UMA MALHA UNIDIMENSIONAL .....	98
FIGURA 26 – EXEMPLO DE ESTRATÉGIA DE ENRIQUECIMENTO LOCAL PARA UMA MALHA UNIDIMENSIONAL .....	99
FIGURA 27 – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS ARNDTS BIDIMENSIONAIS ....	102
FIGURA 28 – FLUXOGRAMA DE IMPLEMENTAÇÃO DA PUAIG ADAPTATIVA PARA VIBRAÇÃO LIVRE .....	104
FIGURA 29 – REINSERÇÃO DO MODO DE VIBRAR NO ESPAÇO PARAMÉTRICO .....	104
FIGURA 30 – FLUXOGRAMA DE IMPLEMENTAÇÃO DA PUAIG ADAPTATIVA PARA VIBRAÇÃO FORÇADA .....	106

FIGURA 31 – BARRA UNITÁRIA FIXA NAS DUAS EXTREMIDADES .....	110
FIGURA 32 – ERRO RELATIVO DA 1 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA .....	111
FIGURA 33 – ERRO RELATIVO DA 2 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA .....	111
FIGURA 34 – ERRO RELATIVO DA 3 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $H$ .....	112
FIGURA 35 – ERRO RELATIVO DA 4 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $H$ .....	112
FIGURA 36 – ERRO RELATIVO DA 5 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $H$ .....	113
FIGURA 37 – ERRO RELATIVO DA 6 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $H$ .....	113
FIGURA 38 – ESPECTROS DE FREQUÊNCIA DA BARRA UNITÁRIA .....	114
FIGURA 39 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA PARA A BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $H$ .....	116
FIGURA 40 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA A BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $H$ .....	116
FIGURA 41 – ERRO RELATIVO DA 1 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $K$ .....	117
FIGURA 42 – ERRO RELATIVO DA 2 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $K$ .....	117
FIGURA 43 – ERRO RELATIVO DA 3 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $K$ .....	118
FIGURA 44 – ERRO RELATIVO DA 4 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $K$ .....	118

FIGURA 45 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA PARA A BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $K$ .....	119
FIGURA 46 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA A BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO $K$ .....	120
FIGURA 47 – ERRO RELATIVO DA 1 <sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	121
FIGURA 48 – ERRO RELATIVO DA 2 <sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	121
FIGURA 49 – ERRO RELATIVO DA 3 <sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	122
FIGURA 50 – ERRO RELATIVO DA 4 <sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	122
FIGURA 51 – ERRO RELATIVO DA 5 <sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	123
FIGURA 52 – ERRO RELATIVO DA 6 <sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	123
FIGURA 53 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA PARA A BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	124
FIGURA 54 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA A BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	125
FIGURA 55 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS PARA A PUAIG COM 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	125
FIGURA 56 – ERRO RELATIVO DA 1 <sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	126
FIGURA 57 – ERRO RELATIVO DA 2 <sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	127

FIGURA 58 – ERRO RELATIVO DA 3 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	127
FIGURA 59 – ERRO RELATIVO DA 4 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	128
FIGURA 60 – ERRO RELATIVO DA 5 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	128
FIGURA 61 – ERRO RELATIVO DA 6 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	129
FIGURA 62 – TRELIÇA DE SETE BARRAS .....	130
FIGURA 63 – ESQUEMA DE ACOPLAMENTO PARA TRELIÇA DE SETE BARRAS COM A PUAIG .....	130
FIGURA 64 – BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA .....	132
FIGURA 65 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM $\omega = 20RAD/S$ .....	134
FIGURA 66 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA PARA A PRIMEIRA ITERAÇÃO .....	134
FIGURA 67 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA PARA A PRIMEIRA ITERAÇÃO .....	135
FIGURA 68 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA PARA A PRIMEIRA ITERAÇÃO .....	136
FIGURA 69 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 20RAD/S$ PARA O PROCESSO ADAPTATIVO .....	137
FIGURA 70 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 20RAD/S$ PARA O PROCESSO ADAPTATIVO .....	137

FIGURA 71 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 20RAD/S$ PARA O PROCESSO ADAPTATIVO .....	138
FIGURA 72 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA PARA A SEGUNDA ITERAÇÃO .....	139
FIGURA 73 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 25.13RAD/S$ ...	140
FIGURA 74 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, , COM $\omega = 25.13RAD/S$ .....	140
FIGURA 75 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 25.13RAD/S$ .....	141
FIGURA 76 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 25.13RAD/S$ PARA O PROCESSO ADAPTATIVO .....	142
FIGURA 77 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 25.13RAD/S$ PARA O PROCESSO ADAPTATIVO .....	142
FIGURA 78 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 25.13RAD/S$ PARA O PROCESSO ADAPTATIVO .....	143
FIGURA 79 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 25.13RAD/S$ PARA O PROCESSO ADAPTATIVO .....	143
FIGURA 80 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM $\omega = 25.13RAD/S$ PARA O PROCESSO ADAPTATIVO .....	144
FIGURA 81 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA .....	145

FIGURA 82 – ERRO RELATIVO DA 1 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	146
FIGURA 83 – ERRO RELATIVO DA 2 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	146
FIGURA 84 – ERRO RELATIVO DA 3 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	147
FIGURA 85 – ERRO RELATIVO DA 4 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	147
FIGURA 86 – ERRO RELATIVO DA 5 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	148
FIGURA 87 – ERRO RELATIVO DA 6 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	148
FIGURA 88 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	149
FIGURA 89 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	149
FIGURA 90 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO CONSTANTE .....	150
FIGURA 91 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE .....	151
FIGURA 92 – VELOCIDADES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE .....	151
FIGURA 93 – ACELERAÇÕES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE .....	152
FIGURA 94 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE .....	153

FIGURA 95 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A PUAIG ADAPTATIVA .....	154
FIGURA 96 – VELOCIDADES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A PUAIG ADAPTATIVA .....	154
FIGURA 97 – ACELERAÇÕES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A PUAIG ADAPTATIVA .....	155
FIGURA 98 – CHAPA RETANGULAR FINA FIXA EM UMA EXTREMIDADE .....	156
FIGURA 99 – ERROS RELATIVOS PARA AS 20 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DA CHAPA FINA COM ENRIQUECIMENTO $\beta_1 = \pi$ .....	157
FIGURA 100 – CHAPA RETANGULAR SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE IMPACTO .....	158
FIGURA 101 – DESLOCAMENTOS DA PLACA FINA SUBMETIDA A CARGA DE IMPACTO .....	158
FIGURA 102 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES PARA A CHAPA FINA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE IMPACTO .....	159
FIGURA 103 – DESLOCAMENTOS DA PLACA FINA SUBMETIDA A CARGA DE IMPACTO .....	160
FIGURA 104 – MEMBRANA FIXA NAS FRONTEIRAS .....	161
FIGURA 105 – MEMBRANA RETANGULAR SUJEITA A CARREGAMENTO HARMÔNICO .....	163
FIGURA 106 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES DA MEMBRANA COM EXCITAÇÃO HARMÔNICA PARA AIG E PUAIG .....	164
FIGURA 107 – ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA .....	165



FIGURA 108 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES DA MEMBRANA COM EXCITAÇÃO HARMÔNICA PARA A PUAIG COM ENRIQUECIMENTO ADAPTATIVO .....	165
FIGURA 109 – ANÁLISE DO DESLOCAMENTO DA PUAIG ADAPTATIVA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA .....	166
FIGURA 110 – BARRA HETEROGÊNEA FIXA EM UMA EXTREMIDADE .....	182
FIGURA 111 – ERRO RELATIVO DA 1 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO $H$ .....	184
FIGURA 112 – ERRO RELATIVO DA 2 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO $H$ .....	184
FIGURA 113 – ERRO RELATIVO DA 3 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO $H$ .....	185
FIGURA 114 – ERRO RELATIVO DA 4 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO $H$ .....	185
FIGURA 115 – ERRO RELATIVO DA 5 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO $H$ .....	186
FIGURA 116 – ERRO RELATIVO DA 6 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO $H$ .....	186
FIGURA 117 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO $H$ .....	187
FIGURA 118 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO $H$ .....	188
FIGURA 119 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO $H$ .....	188
FIGURA 120 – ERRO RELATIVO DA 1 <sup>ª</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO .....	189

FIGURA 121 – ERRO RELATIVO DA 2 <sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO	189
FIGURA 122 – ERRO RELATIVO DA 3 <sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO	190
FIGURA 123 – ERRO RELATIVO DA 4 <sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO	190
FIGURA 124 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO	191
FIGURA 125 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO	191
FIGURA 126 – ERRO RELATIVO DA 1 <sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO	192
FIGURA 127 – ERRO RELATIVO DA 2 <sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO	193
FIGURA 128 – ERRO RELATIVO DA 3 <sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO	193
FIGURA 129 – ERRO RELATIVO DA 4 <sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO	194
FIGURA 130 – ERRO RELATIVO DA 5 <sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO	194
FIGURA 131 – ERRO RELATIVO DA 6 <sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO	195
FIGURA 132 – TRELIÇA DE 15 BARRAS .....	196
FIGURA 133 – ESQUEMA DE ACOPLAMENTO PARA TRELIÇA DE 15 BARRAS COM A PUAIG .....	196

FIGURA 134 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE .....	198
FIGURA 135 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE .....	198
FIGURA 136 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE .....	199
FIGURA 137 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE .....	200
FIGURA 138 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A SEGUNDA ITERAÇÃO .....	201
FIGURA 139 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A SEGUNDA ITERAÇÃO .....	201
FIGURA 140 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A SEGUNDA ITERAÇÃO .....	202
FIGURA 141 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA .....	204
FIGURA 142 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA .....	205
FIGURA 143 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA NA PUAIG ADAPTATIVA .	206
FIGURA 144 – VELOCIDADES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA NA PUAIG ADAPTATIVA .....	206
FIGURA 145 – ACELERAÇÕES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA NA PUAIG ADAPTATIVA .....	207
FIGURA 146 – MEMBRANA CIRCULAR FIXA NAS EXTREMIDADES .....	208

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – IDENTIFICAÇÃO DAS FORMULAÇÕES DA PUAIG .....	109
TABELA 2 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO PARA A TRELIÇA DE SETE BARRAS .....	131
TABELA 3 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA .....	135
TABELA 4 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO .....	139
TABELA 5 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO .....	141
TABELA 6 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO .....	144
TABELA 7 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA .....	152
TABELA 8 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO .....	155
TABELA 9 – ERRO ACUMULADO PARA A CHAPA FINA SUBMETIDA A FORÇA DE IMPACTO .....	159
TABELA 10 – ERRO ACUMULADO PARA A CHAPA FINA SUBMETIDA A FORÇA DE IMPACTO .....	160
TABELA 11 – ERROS RELATIVOS DA MEMBRANA FIXA .....	162

TABELA 12 – ERROS ACUMULADOS PARA MEMBRANA SUBMETIDA A EXCITAÇÃO HARMÔNICA .....	166
TABELA 13 – PRIMEIRAS 10 FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO ANALÍTICAS PARA A BARRA HETEROGÊNEA .....	183
TABELA 14 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO PARA A TRELIÇA DE 15 BARRAS .....	196
TABELA 15 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA .....	199
TABELA 16 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO .....	203
TABELA 17 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA .....	205
TABELA 18 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA .....	207
TABELA 19 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA ONDA CIRCULAR	209

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATÖES

AIG - Análise Isogeométrica

BS - B-Splines

CAD - *Computer Aided Design*

FEA - *Finite Element Analysis*

MC - Método Composto

MEF - Método dos Elementos Finitos

MEFF - Método dos Elementos Finitos p-Fourier

MEFG - Método dos Elementos Finitos Generalizado

MEFGO - Método dos Elementos Finitos Generalizado Ortonormalizado

MEFH - Método dos Elementos Finitos Hierárquicos

MMA - Método dos Modos Admissíveis

MPU - Método da Partição da Unidade

NURBS - *Non Uniform Rational B-Splines*

PU - Partição da Unidade

## LISTA DE SÍMBOLOS

$k$  - Constante elástica de uma mola

$m$  - Massa de uma partícula ou corpo

$x(t), y(t)$  - Posição transiente de um ponto ou corpo

$\ddot{x}$  - Aceleração

$\mathbf{K}$  - Matriz de Rigidez

$\mathbf{M}$  - Matriz de Massa

$\mathbf{f}$  - Vetor de Forças

$f$  - Módulo de uma força

$\mathbf{u}$  - Vetor de deslocamentos, Autovetor, Modo de vibrar

$\ddot{\mathbf{u}}$  - Vetor de acelerações

$\Omega$  - Domínio do espaço

$t$  - Tempo

$\omega$  - Frequência natural vibração, Frequência de excitação

$\omega^h$  - Frequência natural aproximada

$\lambda$  - Autovalor

$i, j$  - Índices

$\mathbf{A}_i$  - Amplitude

$\mathbf{D}$  - Operador Diferencial

$\mathbf{n}$  - Vetor normal ao contorno

$\mathbf{w}$  - Função de ponderação

$\beta$  - Constantes

$L(w), a(w, u)$  - Formas bilineares

$\Gamma$  - Fronteiras de um domínio no espaço

$P_i$  - Polinômios interpoladores

$F_i$  - Funções de forma

$\eta_i$  - Funções partição da unidade

$s_i^j$  - Funções enriquecedoras

$H_s(\Omega)$  - Espaço de Hilbert em  $\Omega$

$a_i, j, c_i$  - Grau de liberdade de campo

$u_i$  - Deslocamentos nodais

$f_i$  - Forças nodais

$\Xi$  - Vetor de *knots*

$\xi, \eta$  - Coordenadas no espaço paramétrico

$\xi_i$  - *knots*

$p, q$  - Ordem polinomial

$N_{i,p}(\xi)$  - Funções B-Splines de grau  $p$

$R_{i,p}$  - Funções NURBS de grau  $p$

$S_{i,j}^{p,q}$  - Superfícies NURBS de grau  $p, q$

$m, n$  - Número de funções base

$supp(\cdot)$  - Suporte de uma função

$X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)$  - Coordenadas no espaço físico

$C(\xi)$  - Curva NURBS

$S(\xi, \eta)$  - Superfície NURBS

$B_{ij}$  - Pontos de controle

$w_i, j$  - Pesos geométricos

$J(\xi)$  - Parâmetro de mapeamento

$J(\xi, \eta)$  - Matriz Jacobiana

$f_i$  - Força inercial

$\rho$  - Massa específica

$A$  - Área da seção transversal

$E$  - Módulo de Young

$p(C, t)$  - Força de excitação transiente

$\theta$  - Rotação

$I$  - Momento de inércia

$v$  - Deslocamentos transversais

$M$  - Momento fletor



$V$  - Força cortante

$R$  - Raio

$L$  - Comprimento

$\epsilon$  - Deformação axial

$\chi$  - Deformação de curvatura

$\gamma$  - Deformação cisalhante

$\kappa$  - Número de Condição

$\alpha$  - Ângulo de inclinação, Parâmetro de material heterogêneo

$\mathbf{T}$  - Matriz de rotação

$\bar{\mathbf{T}}$  - Operador diferencial

$\sigma$  - Tensão axial

$\tau$  - Tensão cisalhante

$\mathbf{D}$  - Tensor de relações constitutivas

$\nu$  - Coeficiente de Poisson

$\mathbf{H}$  - Matriz de funções

$\mathbf{B}$  - Matriz de derivadas

$c$  - Velocidade de propagação

$\beta_j$  - Parâmetro de enriquecimento

$L_e$  - Comprimento do elemento

$e$  - Erro

$u^h$  - Deslocamento aproximado

$\nabla^2$  - Operador Laplaciano

$c$  - Velocidade de Propagação

$\bar{\Xi}$  - Vetor de coordenadas paramétricas

$A_n, B_n, k_n, C_n$  - Parâmetros de solução analítica

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>27</b>
1.1 OBJETIVO GERAL	30
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	30
1.3 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES	30
1.4 JUSTIFICATIVA	31
<b>2 REVISÃO TEÓRICA</b>	<b>32</b>
2.1 FENÔMENOS DE VIBRAÇÃO EM SÓLIDOS	32
2.1.1 Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade	33
2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS	37
2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	38
2.4 MÉTODOS ENRIQUECIDOS	41
2.5 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE	43
2.6 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO	44
<b>3 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA</b>	<b>47</b>
3.1 AIG x MEF	48
3.2 B-SPLINES	50
3.3 NURBS	54
3.4 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA	55
3.5 REFINAMENTOS	57

3.6 IMPLEMENTAÇÃO DA AIG EM PROBLEMAS LINEARES .....	61
3.6.1 Mapeamento .....	63
3.6.2 Integração .....	65
3.7 AIG NA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS .....	66
<b>4 FORMULAÇÃO VARIACIONAL DOS PROBLEMAS DINÂMICOS .....</b>	<b>71</b>
4.1 BARRA AXIAL .....	71
4.1.1 Problema de Vibração Livre .....	75
4.1.2 Forma Local .....	76
4.2 VIGA DE EULER-BERNOULLI .....	77
4.3 DECOMPOSIÇÃO GLOBAL PARA OS PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS ..	82
4.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES .....	84
4.5 EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL .....	89
<b>5 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA COM ENRIQUECIMENTO .....</b>	<b>93</b>
5.1 FORMULAÇÃO PARA OS PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS .....	95
5.2 FORMULAÇÃO PARA OS PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS .....	96
5.3 ESTRATÉGIAS DE ENRIQUECIMENTO .....	97
5.4 PROCEDIMENTOS ADAPTATIVOS .....	103
<b>6 PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS .....</b>	<b>108</b>
6.1 EXEMPLO 1 - BARRA UNITÁRIA .....	110
6.1.1 Refinamento $h$ .....	110
6.1.2 Refinamento $k$ .....	116
6.1.3 Níveis de Enriquecimento .....	120
6.1.4 Refinamento Adaptativo .....	126
6.2 EXEMPLO 2 - TRELIÇA DE SETE BARRAS .....	129

6.3 EXEMPLO 3 - BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA .....	131
6.3.1 Frequência Excitadora $\omega = 20rad/s$ .....	133
6.3.2 Frequência Excitadora $\omega = 25.13rad/s$ .....	139
6.4 EXEMPLO 4 - VIGA SIMPLEMENTE APOIADA .....	144
6.4.1 Níveis de Enriquecimento .....	145
6.5 EXEMPLO 5 - VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SUBMETIDA A CARREGAMENTO CONSTANTE .....	150
<b>7 PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS .....</b>	<b>156</b>
7.1 EXEMPLO 6 - CHAPA RETANGULAR FINA .....	156
7.2 EXEMPLO 7 - CHAPA RETANGULAR COM CARREGAMENTO DE IMPACTO .....	157
7.3 EXEMPLO 8 - MEMBRANA RETANGULAR FIXA NAS EXTREMIDADES ...	160
7.4 EXEMPLO 9 - MEMBRANA RETANGULAR SUJEITA A CARREGAMENTO HARMÔNICO .....	162
<b>8 CONCLUSÃO .....</b>	<b>167</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>172</b>
<b>ANEXO - EXEMPLOS ADICIONAIS .....</b>	<b>181</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A dinâmica estrutural é uma área de conhecimento das engenharias e da matemática aplicada que estuda o movimento oscilatório dos meios sólidos devido a diversos tipos de excitações transientes. Este campo de estudo tem sido motivado a resolver vários problemas de engenharia como análises de vibrações, propagação de onda, efeitos de ressonância, respostas a terremotos, dentre outros (CHOPRA, 1995).

No campo dos projetos de engenharia e concepções de novas tecnologias, a descrição concisa de um fenômeno de vibração é uma informação importante para a análise e planejamento das estruturas e mecanismos, de forma a garantir uma performance segura e eficiente do que está sendo projetado. O comportamento dinâmico de alguns elementos isolados com características simplificadas possuem solução analítica conhecida, contudo à medida que a estrutura se torna complexa as dificuldades na determinação de soluções analíticas para o seu comportamento dinâmico aumentam consideravelmente, sendo o desenvolvimento e aplicação de um método aproximado uma alternativa recomendável.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é largamente utilizado na resolução de problemas de engenharia (BATHE, 1996; COOK; MALKUS; PLESHA, 1989) e tem sido uma alternativa bem sucedida na determinação dos modos e frequências naturais de vibração de uma estrutura. Porém os resultados para as frequências mais elevadas são imprecisos e o aumento no número de graus de liberdade melhora o resultado da amostragem anterior, mas gera novas frequências elevadas com valores discrepantes (HUGHES, 2012).

Diversos estudos de aprimoramento do MEF foram feitos com o intuito de aumentar a precisão do método e reduzir os esforços computacionais. Os métodos de enriquecimento das funções de forma do MEF com a adição de funções relacionadas às soluções analíticas da equação diferencial governante trouxeram melhores resul-

tados e menores esforços computacionais se comparados com o MEF convencional (ARNDT, 2009). São considerados os métodos enriquecidos mais conhecidos: o Método dos Modos Admissíveis (MMA) (ENGELS, 1992; GANESAN; ENGELS, 1992), o Método Composto (MC) (ZENG, 1998 a, b e c) e o Método dos Elementos Finitos p-Fourier (MEFF) (LEUNG; CHAN, 1998).

Com o surgimento do Método da Partição da Unidade (MPU) (MELENK; BABUSKA, 1996) os procedimentos de enriquecimento das funções de forma foram otimizados. O Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) (STROUBOULIS; COPPS; BABUSKA, 2001), formulado a partir do MPU, obteve resultados superiores aos demais métodos enriquecidos para o problema de estruturas em vibração livre. Os trabalhos desenvolvidos por Arndt (2009), Arndt, Machado e Scremin (2007 e 2009) para a análise da vibração livre de estruturas reticuladas e por Torii (2012) para estruturas reticuladas e estruturas bidimensionais comprovam a eficiência do MEFG comparado com os métodos enriquecidos e com o refinamento hierárquico do MEF.

Em análises de objetos com geometria complexa, o desenvolvimento de um modelo com MEF pode encontrar alguns obstáculos relacionados com a geração e refinamento da malha. Os algoritmos clássicos de geração de malha são construídos a partir de um preliminar desenvolvimento em CAD (*Computer Aided Design*), que é, em geral, utilizado como referência. A partir deste modelo a malha é definida por um conjunto finito de pontos. Atualmente os softwares padrões de análise FEA (*Finite Elements Analysis*) não apresentam uma conexão eficiente entre o desenvolvimento CAD e FEA, gerando desvantagens relacionadas à criação e ao refinamento da malha (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005). Segundo Rogers (2001), o motivo provável pelo qual os estudos entre o desenvolvimento CAD e o Método dos Elementos Finitos não obtiveram uma relação direta se deve ao fato de que a indústria de FEA e CAD se desenvolveram em épocas diferentes, sendo que os softwares de FEA se tornaram consolidados no tempo em que os primeiros ambientes CAD estavam em desenvolvimento.

A Análise Isogeométrica (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005) é um mé-

todo de resolução numérica de equações diferenciais de aplicação similar ao MEF, mas, ao contrário desse, propõe a utilização das funções desenvolvidas no ambiente CAD como funções de aproximação para a geometria do elemento e para a solução da equação diferencial governante do problema analisado. Estas funções são denominadas NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*) e trazem vantagens sobre a descrição geométrica de um problema no ambiente FEA, visto que, com este procedimento, as funções utilizadas no desenvolvimento CAD e FEA agora são comuns: o objeto importado de um ambiente CAD tem sua geometria descrita de maneira exata e não há necessidade de remalhamento, ou seja, de reaccessar e reprocessar informações sobre o objeto para se realizar refinamento de malha.

A união entre a AIG com os processos de enriquecimento abre uma alternativa promissora, visto que as extensões dos espaços enriquecidos trouxeram ótima acurácia e convergência para muitos modelos dinâmicos, e os aspectos de implementação da AIG trazem vantagens relacionadas ao mapeamento exato e construção de malha. Os primeiros passos da Análise Isogeométrica Enriquecida, neste trabalho referenciada como PUAIG, foram desenvolvidos por Luycker et al. (2011) em aplicações para mecânica da fratura e Ghorashi, Valizadeh e Mohammadi (2011) que demonstrou aspectos vantajosos da PUAIG aplicada ao problema de propagação de trincas. O trabalho recente de Dinachandra e Sethuraman (2018) aplicou a PUAIG para o problema da equação de Helmholtz bidimensional, obtendo resultados vantajosos quando comparados com o MEF e com o MEFG. Contudo as explorações da PUAIG, até o momento, na dinâmica estrutural permanecem não discutidas ainda na literatura.

Neste trabalho desenvolve-se a PUAIG na aplicação de problemas da dinâmica das estruturas, envolvendo problemas lineares unidimensionais e bidimensionais. As discussões teóricas e definições da literatura são abordadas no capítulo 2. A AIG pura em seu contexto e aspectos de implementação é discutida no capítulo 3, e as formulações numéricas para a dinâmica com mapeamento CAD são apresentadas no capítulo 4. A extensão e detalhes das estratégias de enriquecimento da PUAIG são discutidas no capítulo 5 e exemplos numéricos unidimensionais e bidimensionais são

desenvolvidos e discutidos no capítulo 6 deste trabalho.

Esta tese teve como principais resultados os trabalhos de (RAUEN; MACHADO; ARNDT, 2017a) e (RAUEN; MACHADO; ARNDT, 2020) que tratam da PUAIG em aplicações para elementos de barra e treliça plana, bem como (RAUEN; MACHADO; ARNDT, 2017b) e (RAUEN, 2014) que aplicam a AIG pura em problemas da dinâmica estrutural unidimensional.

## 1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é de propor, desenvolver e testar numericamente estratégias de enriquecimento da PUAIG para problemas da dinâmica das estruturas.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver uma técnica adaptativa para a AIG;
- Testar o acoplamento de estruturas de barras;
- Testar diferentes formas de enriquecimento na AIG;
- Comparar os resultados com o MEF, a AIG e o MEFG.

## 1.3 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES

As principais contribuições deste trabalho são:



- Formulações de dinâmica estrutural com mapeamento CAD: barras, vigas, estado plano e membranas;
- Formulação e Metodologia de Acoplamento para Trelças;
- Técnicas de enriquecimento para a dinâmica estrutural;
- Estratégias adaptativas para Análise Modal e Transiente.

#### 1.4 JUSTIFICATIVA

As soluções de engenharia são elaboradas, cada vez mais, visando a performance ótima com relação aos processos e economia de materiais. Sob este enfoque os projetos elaborados com maior precisão sob os fenômenos que o norteiam permitem a concepção de estruturas mais enxutas e eficientes. Desta forma o aprimoramento nos métodos relacionados à análise dinâmica, sob o ponto de vista da acurácia e eficiência na implementação, permitem avaliar as estruturas com maior certeza do seu comportamento real, permitindo soluções mais arrojadas e econômicas.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

Neste capítulo são abordadas as definições teóricas mais importantes no desenvolvimento deste trabalho.

### 2.1 FENÔMENOS DE VIBRAÇÃO EM SÓLIDOS

A dinâmica das estruturas estuda a resposta transiente dos sistemas estruturais devido a ação de forças ou excitações dinâmicas. A investigação dos fenômenos de vibração tem sido motivada por muitas aplicações de engenharia como o desenvolvimento de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas e controle de sistemas (RAO, 1995). Nas estruturas civis ressalta-se importantes aplicações sobre a resposta dos sólidos a forças randômicas provenientes das ações de intempéries do ambiente, que podem ser ocasionadas, por exemplo, por ações de terremotos, fenômenos de ressonância, desgaste por fadiga ou estar em faixas de frequências que incitam o desconforto humano (INMAN, 2001).

As duas maiores áreas de interesse da dinâmica das estruturas são os fenômenos do tipo estacionários, onde avaliam-se modos e frequências naturais de vibração dos meios sólidos, e os fenômenos transientes que determinam os efeitos de deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura em qualquer instante de tempo devido à ação de forças dinâmicas. Para ambas análises a resposta de um sistema estrutural se dá através de combinações de oscilações harmônicas em torno da sua posição de equilíbrio estático (CHOPRA, 1995). Matematicamente as soluções gerais destes sistemas oscilatórios são provenientes da imposição de equilíbrio dinâmico, com adição de termos inerciais, delineada pelo princípio de d'Alembert.

O princípio básico de equilíbrio dinâmico para um grau de liberdade é exem-

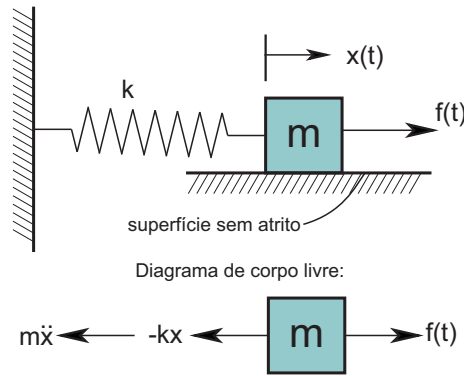


FIGURA 1 – SISTEMA MASSA-MOLA COM UM GRAU DE LIBERDADE

plificado pelo sistema massa-mola, ilustrado na Figura 1 onde uma massa  $m$  é sujeita a uma força externa  $f(t)$  em função do tempo  $t$  e a uma força elástica proveniente da mola com constante  $k$ . O respectivo diagrama de corpo livre é esboçado levando em conta a força inercial, necessária para a imposição do equilíbrio dinâmico (CHOPRA, 1995; INMAN, 2001). Segundo o princípio de d'Alembert a equação governante do problema é escrita, desprezando os efeitos de amortecimento, como:

$$m\ddot{x} + kx = f(t), \quad (1)$$

onde o campo de deslocamentos  $x(t)$  descreve um comportamento oscilatório.

A resposta modal para o problema é determinada através da equação diferencial 1 sendo desprezado o efeito da força externa  $f(t)$ . Neste caso o sistema produz um movimento do harmônico simples e uma frequência de vibração natural bem definida (RAO, 1995). Segundo Chopra (1995) a resposta do sistema para uma força transiente  $f(t)$  pode ser determinada através dos métodos de integração no tempo como a Integral de Duhamel e os métodos de transformação de Laplace e Fourier.

### 2.1.1 Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade

A maioria das aplicações na dinâmica das estruturas consiste em sistemas contínuos e formados por diversos graus de liberdade. Na grande maioria dos proble-

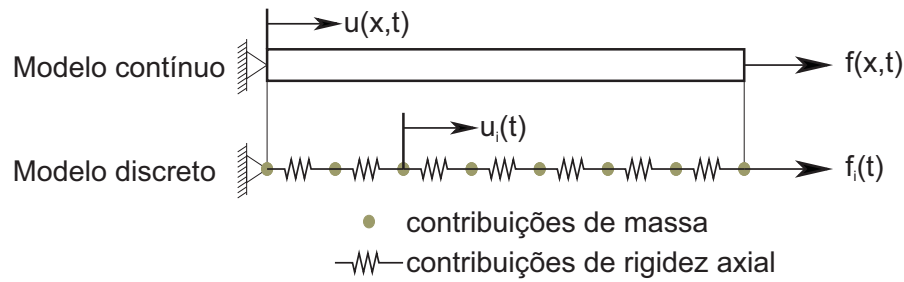


FIGURA 2 – EXEMPLO DE DISCRETIZAÇÃO PARA UM MODELO DE BARRA

mas práticos, principalmente aqueles formados pelo acoplamento de diversos elementos, uma solução analítica escrita para um domínio contínuo pode ser dificultosa de se obter. Uma alternativa importante e largamente praticável nos problemas de dinâmica das estruturas é dividir o domínio do problema em subdomínios finitos os quais apresentam contribuições discretas de rigidez, massa e força (CHENG, 2001). A figura 2 mostra um exemplo no qual a simplificação de uma estrutura com várias camadas é discretizada em múltiplos graus de liberdade. O mesmo processo de simplificação pode ser realizado para um corpo contínuo, onde o domínio é dividido através de finitas contribuições, conforme mostra a figura 2 para um elemento de barra com vibração axial.

A resolução dos métodos discretos em dinâmica das estruturas leva em conta o equilíbrio dinâmico em cada grau de liberdade da sua divisão. Isso permite que múltiplas equações na forma da equação 1 possam ser escritas no sistema com vários graus de liberdade, sob a forma (CHOPRA, 1995):

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (2)$$

onde  $\mathbf{K}$  representa a matriz que carrega as contribuições discretas de rigidez,  $\mathbf{M}$  a matriz que carrega as contribuições de massa,  $\mathbf{f}$  o vetor que leva as contribuições discretas de força e  $\mathbf{u}$  é o vetor que carrega as contribuições de deslocamentos e  $\ddot{\mathbf{u}}$  sua aceleração. Além de respeitar a lei do equilíbrio dinâmico, os termos de rigidez do sistema discreto são obtidos de forma a respeitar as relações impostas através da teoria da elasticidade, que consistem nas condições de compatibilidade entre deformações

e deslocamentos e nas relações constitutivas entre tensões e deformações.

Em sistemas com vários graus de liberdade o problema de vibração livre pode ser resolvido através do sistema de equações indicado em (2) considerando a ausência de excitações externas ( $f = 0$ ). O movimento de vibração livre para casos gerais é do tipo harmônico simples e pode ser escrito através de uma expressão geral para os deslocamentos  $\mathbf{u}(\Omega, t)$  na forma (BECKER; CAREY; ODEN, 1983; HUGHES, 2012):

$$\mathbf{u}(x, t) = e^{i\omega t} \mathbf{u}(x), \quad (3)$$

onde  $x$  representa um domínio de espaço,  $t$  o tempo,  $\omega$  a frequência natural de vibração,  $\mathbf{u}$  um vetor de deslocamentos e  $i$  a unidade imaginária. Ao substituir a expressão geral 3 na equação 2 os problemas de vibração livre em múltiplos graus de liberdade recaem em problemas de autovalores generalizados na forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{M}\mathbf{u}, \quad (4)$$

onde  $\lambda = \omega^2$  é o autovalor relacionado com a frequência natural de vibração,  $\mathbf{u}$  o autovetor relacionado com o modo natural de vibração,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  são as matrizes de rigidez e massa, respectivamente. Um modo de vibração, associado a uma frequência natural de vibração pode ser entendido como uma configuração particular do campo de deslocamentos que se apresenta com características harmônicas. Em geral uma estrutura possui infinitos modos e frequências naturais de vibração, contudo, por conta da discretização, apenas um número limitado de modos é determinado, que corresponde ao número de graus de liberdade do sistema (CHOPRA, 1995).

A frequência natural de vibração pode ser também determinada através do quociente de Rayleigh para um dado modo  $\mathbf{u}$  por (MEIROVITCH, 1975):

$$\lambda = \omega^2 = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}. \quad (5)$$

O quociente de Rayleigh que é uma propriedade matematicamente natural dos pro-

blemas de autovalores, adquire na dinâmica estrutural um significado físico. Segundo Clough e Penzien (1993) um autovalor  $\lambda$  relacionado com um modo  $\mathbf{u}$  corresponde à razão entre as energias de deformação e cinética decorrente do modo. A propriedade do quociente de Rayleigh possui várias utilidades para a dinâmica das estruturas como o auxílio na demonstração de teoremas que tangem os fenômenos de vibração (BECKER; CAREY; ODEN, 1983), no desenvolvimento de estimadores de erro (WIBERG; BAUSYS; HAGER, 1999) e métodos adaptativos para a dinâmica estrutural (ARNDT; MACHADO; SCREMIN, 2010).

Uma importante propriedade que decorre dos modos naturais de vibração é a ortogonalidade em relação à matriz de massa e rigidez que pode ser expressa por:

$$\mathbf{u}_m^T \mathbf{M} \mathbf{u}_n = 0 \quad m \neq n \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_m^T \mathbf{K} \mathbf{u}_n = 0 \quad m \neq n, \quad (7)$$

onde  $\mathbf{u}_m$  e  $\mathbf{u}_n$  são dois modos de vibração diferentes. Detalhes de demonstração desta propriedade são dados por Chopra (1995) e Clough e Penzien (1993). A principal consequência da ortogonalidade dos modos é que estes formam uma base para fenômenos de vibração forçada na mesma estrutura, uma vez que são linearmente independentes. Um campo de deslocamentos transiente para a solução da equação 2 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores que expressam os modos  $\mathbf{u}$  e amplitudes  $\mathbf{A}$  na forma (CLOUGH; PENZIEN, 1993):

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^n A_i(x, t) \mathbf{u}_i, \quad (8)$$

onde  $\mathbf{u}_i$  é o  $i$ -ésimo modo natural da estrutura e  $A_i$  é o  $i$ -ésimo termo de amplitude. A participação dos modos de vibração nos fenômenos transientes depende das características da estrutura e do tipo de excitação externa atuante. Em geral cargas de impacto, por exemplo, que transmitem forças de curto intervalo de tempo tendem a

excitar os modos mais altos, enquanto cargas lentas tendem a excitar os modos mais baixos das estruturas (TORII, 2012; KREYSZIG, 2010).

## 2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS

Os métodos numéricos consistem em um conjunto de ferramentas, teorias e técnicas matemáticas para a solução de equações algébricas e diferenciais através de técnicas de aproximação, e são implementáveis e automatizáveis através da computação (STOER et al., 2013). A principal área de aplicação numérica nas situações práticas de engenharia está na resolução dos problemas de valor de contorno, descritos por sistemas de equações diferenciais com valores prescritos em sua fronteira.

Grande maioria dos métodos de resolução de PVCs utiliza processos de discretização, ao subdividir o domínio do problema em contribuições nodais aproximadas. Para que um método numérico possua eficiência em sua implementação deve-se assegurar que um aumento no número de subdivisões no processo discreto impacte no aprimoramento da solução e atenuação dos erros de truncamento, o que caracteriza o critério de convergência. Ainda se espera que este aprimoramento dos erros seja gradual, de modo que para um número infinito de subdomínios a solução numérica não apresente erros, coincidindo com a solução ideal, o que caracteriza o chamado critério de completude. Discussões detalhadas sobre as questões de completude e convergência são feitas por (TYRTYSHNIKOV, 2012) e uma abordagem algébrica é desenvolvida por (REDDY, 2013). A figura 3 ilustra um esquema de refinamento de malha similar o Método dos Elementos Finitos (MEF) e outros métodos derivados, que consiste em efetuar um aumento no número de pontos discretos do modelo com o intuito de melhorar o resultado da aproximação.

Na dinâmica das estruturas a aplicação dos métodos numéricos consiste em obter respostas aproximadas para os deslocamentos, velocidades e acelerações, no

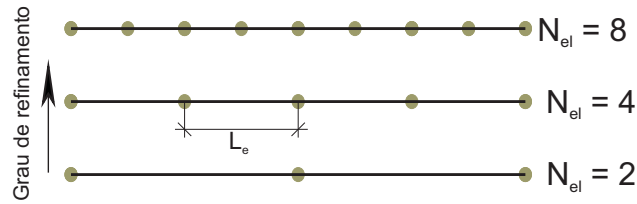


FIGURA 3 – REFINAMENTO DE MALHA EM UM PROBLEMA DISCRETO

regime transiente, e frequências e modos aproximados, no estado estacionário. Tais respostas levam a um campo aproximado o qual geralmente carrega desvios em relação a uma solução ideal.

As principais formulações do MEF e seus métodos derivados são baseados na forma fraca do problema da equação diferencial governante. A seguir é apresentado o Método dos Resíduos Ponderados, a principal técnica que dá origem aos métodos de aproximação utilizados no escopo deste trabalho.

### 2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; RAO, 2005) é uma derivação do método dos resíduos ponderados, onde o método de Galerkin é aplicado em subdivisões finitas de um domínio. Um conjunto de funções polinomiais base é aplicado a um elemento particular, escritos para o método de Galerkin na forma:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) \mathbf{u}_i, \quad (9)$$

onde  $P_i(x)$  são funções base polinomiais e  $\mathbf{u}_i$  são contribuições nodais do processo de discretização. A figura 4 mostra um esquema de discretização do MEF, onde as funções são definidas em um espaço paramétrico, e mapeadas para o espaço físico do problema, elemento a elemento. A matriz de contribuições nodais do problema global é definida através de acoplamentos de matrizes locais (BATHE, 1996).



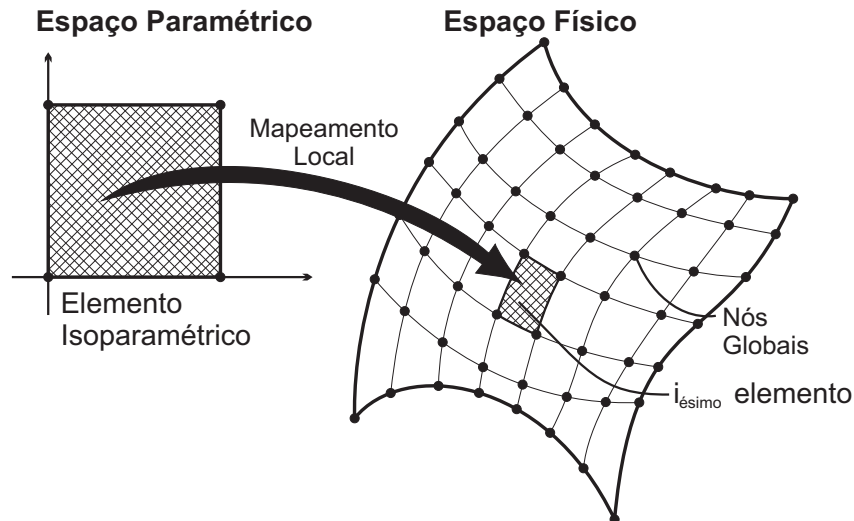


FIGURA 4 – ESQUEMA DE FORMAÇÃO DE MALHA DO MEF

O MEF se tornou um dos métodos numéricos mais utilizados na Engenharia, principalmente por apresentar robustez numérica em diversos problemas clássicos que tangem aplicações em vários setores da física e matemática aplicada (QUEK; LIU, 2003). O MEF foi idealizado pioneiramente por Turner et al. (1956) e Argyris e Kelsey (1960), e uma grande gama de aplicações para problemas lineares e não lineares foi desenvolvida no final dos anos 60 e as bases matemáticas do método foram apresentadas nos anos 70 (CHANDRUPATLA, 2004). O MEF tornou-se rapidamente consolidado, sendo que softwares padrões de análise, como o Nastran, surgiram já no final dos anos 60 (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005).

Com relação ao tempo de processamento computacional, o MEF apresenta características vantajosas. As matrizes decorrentes das formulações dos problemas no método são simétricas e esparsas. Atualmente os algoritmos de resolução de sistemas formados por matrizes esparsas são consolidados e existem diversos pacotes e rotinas otimizadas para este cálculo. Um detalhamento sobre a lógica do desenvolvimento destes algoritmos é feito por Gould, Hu e Scott (2005).

Os resultados obtidos por uma solução via MEF podem ser melhorados por procedimentos de reformulação do problema, denominados refinamentos, os quais podem proceder sob três maneiras diferentes. O primeiro e mais simples procedimento,

denominado refinamento  $h$ , consiste em aumentar o número de elementos na malha do problema. O segundo tipo de refinamento, denominado refinamento  $p$ , consiste em manter o número de elementos e aumentar a ordem do polinômio interpolador definido no elemento base. E a terceira maneira, designada como refinamento  $hp$ , consiste em aumentar o número de elementos e também a ordem polinomial  $p$ . Apesar do refinamento  $p$  apresentar uma maior dificuldade de implementação, sua taxa de convergência é maior do que o refinamento  $h$ , ou seja, o refinamento  $p$  se aproxima mais rapidamente da solução ideal do problema (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

Com relação a geração e o refinamento de malha, a formulação mais utilizada no MEF utiliza é o elemento isoparamétrico, que basicamente consiste na utilização da própria base polinomial interpoladora do problema para equacionar o mapeamento do elemento local (OÑATE, 2010). O equacionamento para o mapeamento utiliza as coordenadas dos nós no domínio global, que devem ser conhecidas a priori. Quando se trata de domínios complexos, geralmente uma geometria de referência é utilizada para captar tais coordenadas e há necessidade de reaccessar a geometria no refinamento de malha (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005).

As aplicações do MEF na resolução de problemas de dinâmica das estruturas são largamente discutidas na literatura. O MEF como alternativa para a resolução de tais problemas apresenta eficiência aceitável, porém sua formulação polinomial clássica e seus procedimentos de refinamento geram erros elevados para as frequências de vibração mais altas (HUGHES, 2012). Os refinamentos  $h$  e  $p$  melhoram os resultados das frequências e modos existentes anteriores ao refinamento, contudo com o aumento do número de graus de liberdade, novas frequências mais altas são geradas na amostragem, atribuindo erros semelhantes para o refinamento  $h$  e erros maiores para o refinamento  $p$  no espectro de frequências (COTTRELL et al., 2006). Contudo os resultados desenvolvidos por Arndt (2009) para o refinamento  $p$  do MEF mostram elevada taxa de convergência para as frequências naturais de vibração em problemas unidimensionais.

## 2.4 MÉTODOS ENRIQUECIDOS

Os métodos enriquecidos na dinâmica das estruturas surgiram como um aprimoramento do MEF, sobretudo para os fenômenos de vibração livre, na tentativa de sanar alguns problemas de acurácia e convergência apresentados pela formulação clássica do MEF. A ideia principal dos métodos enriquecidos consiste em estender o espaço de funções interpoladoras para os deslocamentos na forma (ARNDT; MACHADO; SCREMIN, 2010):

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{u}_{MEF} + \mathbf{u}_{Enriquecido}, \quad (10)$$

onde  $\mathbf{u}_{MEF}$  é o campo de deslocamentos normal do MEF, dado pela equação 9, e  $\mathbf{u}_{Enriquecido}$  é a contribuição de deslocamentos proveniente da inserção de funções adicionais de enriquecimento do campo, dada por:

$$\mathbf{u}_{Enriquecido} = \sum_{i=1}^n F_i c_i, \quad (11)$$

onde  $F_i$  representam funções de enriquecimento e  $c_i$  os graus de liberdade de campo. Em geral a escolha de diferentes funções define os diferentes métodos que surgiram na literatura. Dentre estes métodos se destacam: o Método dos Modos Admissíveis (MMA), o Método Composto (MC) e o Método dos Elementos Finitos p-Fourier (MEFF).

O Método dos Modos Admissíveis (MMA) foi apresentado por Engels (1992) e Ganesan e Engels (1992), partindo da ideia de que o campo de deslocamento pode ser escrito como uma combinação linear de funções que expressam modos admissíveis de vibrar. O campo de deslocamento deste método é formado pela soma de uma parcela de deslocamentos estáticos e uma parcela de deslocamentos dinâmicos, onde a parte estática pode ser tomada pelo próprio campo de deslocamentos do MEF. Para o problema de vibração livre da viga de Euler-Bernoulli, o MMA utilizando funções trigonométricas e funções que representam os modos de uma viga engastada,

apresentou taxas de convergência superiores comparadas com as desenvolvidas com o MEF.

O Método dos Elementos Compostos ou Método Composto (MC) proposto por Zeng (1998a) e Zeng (1998c) consiste em adicionar ao campo de deslocamentos do MEF termos relacionados à solução analítica do problema em questão. Estes termos adicionais decorrem da solução de um elemento isolado que garante a nulidade de deslocamentos nos limites do elemento, permitindo assim a imposição das condições de contorno diretamente na sentença do MEF. Os resultados obtidos por Zeng (1998a) para elementos de barra, Zeng (1998) para elemento de viga de Euler-Bernoulli e Arndt, Machado e Hecke (2003) para treliças e vigas mostraram precisão e taxas de convergência superiores às desenvolvidas pelo MEF. Arndt (2009) classificou o MC como uma versão do MMA, visto que as soluções analíticas dos problemas de vibração são, na realidade, modos admissíveis.

Outro método considerado enriquecido é o Método dos Elementos Finitos p-Fourier (MEFF), apresentado por Leung e Chan (1998). Este método consiste na adição de termos trigonométricos ao campo de deslocamentos do MEF. Para que estes termos trigonométricos não interfiram na imposição das condições de contorno pelos procedimentos padrões do MEF, estas funções devem ser nulas nas interfaces do elemento para a formulação de barra. Para o elemento de viga além da nulidade das funções nos pontos de extremidade, as derivadas primeiras das funções nestes pontos devem também ser nulas. O MEFF apresentou bons resultados para elementos de barras e vigas de Euler-Bernoulli (LEUNG; CHAN, 1998) e uma formulação para vigas espessas com curvatura são apresentadas por Leung e Zhu (2004) com resultados superiores do MEF clássico.

## 2.5 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE

O Método da Partição da Unidade (MPU) (BABUŠKA; MELENK, 1997; MELENK; BABUŠKA, 1996) é um método numérico que permitiu a generalização dos métodos enriquecidos, onde funções quaisquer podem ser adicionadas ao campo de solução. Esta formulação a inserção de comportamentos locais da solução que são conhecidos a priori, ou funções que expressam soluções analíticas do problema (BABUŠKA; MELENK, 1997).

Seja um PVC definido em um domínio  $\Omega$ , que é dividido em subdomínios  $\{\Omega_i\}$ , uma partição da unidade é um conjunto de funções  $\eta_i$  sobrepostas em  $\Omega$  de forma que (DUARTE; ODEN, 1996):

$$\sum_i \eta_i \equiv 1 \text{ em } \Omega. \quad (12)$$

Com o objetivo de garantir existência e unicidade na solução, além de estabilidade e convergência numérica, as funções de partição da unidade devem ainda apresentar comportamento limitado, que é uma condição para estarem contidas em um espaço de Hilbert  $H(\Omega)$ , e suporte compacto. Definições formais, detalhes e teoremas de estabilidade para a utilização das funções de partição da unidade são desenvolvidos por (BABUŠKA; MELENK, 1997).

As funções de partição da unidade permitem estender o espaço de solução aproximada com funções adicionais de enriquecimento  $S_i \in H(\Omega_i \cap \Omega)$  que representem localmente bem a solução  $u$ , conhecidas a priori, podendo serem escritas na forma:

$$S_i = \{s_i^j\}_{j=1}^m. \quad (13)$$

As funções enriquecedoras são multiplicadas pelas funções de partição da unidade, de forma a criar um campo numericamente estável. O espaço de enriquecimento a

ser usado na extensão do campo da solução aproximada é definido por:

$$S := \sum_{i=1} \eta_i S_i = \left\{ \sum_i \eta_i s_i^j \right\} \subset H_s(\Omega). \quad (14)$$

E a solução aproximada  $u^h(x)$  é escrita na forma:

$$u^h(x) = \sum_i \sum_{s_i^j \in S_i} \eta_i(x) s_i^j(x) a_{ij}, \quad (15)$$

onde  $a_{ij}$  denota as contribuições nodais e de campo do problema, expressa sob a forma de graus de liberdade.

O MPU deu origem a diversos métodos de enriquecimento baseados na partição da unidade, como o Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (BABUŠKA; MELENK, 1997), o Método dos Elementos Finitos Estendido (DAUX et al., 2000; ABDELAZIZ; HAMOUINE, 2008), o Método das Núvens hp (DUARTE; ODEN, 1996; ODEN, 1998; LISZKA; DUARTE; TWORZYDLO, 1996) o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (STROUBOULIS; COPPS; BABUŠKA, 2001; BABUŠKA; BANERJEE; OSBORN, 2004), entre outros. Ressalta-se que apesar dos diferentes nomes dados aos métodos, a formulação e o contexto de implementação são muito similares. No escopo deste trabalho é abordado o MEFG como método derivado do MPU, por ter sido esse o principal método enriquecido utilizado na dinâmica das estruturas.

## 2.6 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO

O Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) é um método enriquecido que consiste na união dos espaços de aproximação do MEF e do MPU. Foi proposto primeiramente por Strouboulis, Copps e Babuška (2001) e BABUŠKA, BANERJEE e OSBORN (2004), caracterizado por apresentar alta eficiência numérica se

comparado com a formulação clássica do MEF. Devido a possibilidade de inserir comportamentos conhecidos a priori, o MEFG se destacou na resolução de vários problemas, dentre eles o problema de análise de trincas (DUARTE et al., 2001; DUARTE; KIM, 2008; DAUX et al., 2000), o problema da equação de Helmholtz (STROUBOULIS; BABUŠKA; HIDAJAT, 2006), análise não linear de estruturas (BARROS; PROENÇA; BARCELLOS, 2004), dentre outros.

O processo de enriquecimento através do MEFG apresentou um empecilho numérico relacionado ao alto condicionamento matricial para alguns problemas, podendo levar a perda de acurácia e matrizes singulares (LABORDE et al., 2005; BÉCHET et al., 2005). Algumas modificações do MEFG têm sido desenvolvidas nos últimos anos com o objetivo de atenuar ou eliminar o efeito do mal condicionamento matricial proveniente do enriquecimento. O MEFG Estabilizado (MEFGE), desenvolvido inicialmente por Babuška e Banerjee (2012), apresentou melhor acurácia e condicionamento do que o MEFG clássico em problemas da estática. Gupta et al. (2015) e Malekan e Barros (2016) aplicaram o MEFGE em problemas de mecânica da fratura, obtendo resultados superiores em termos de acurácia e condicionamento quando comparados com o MEFG. Na dinâmica das estruturas um método de estabilização Heurístico foi desenvolvido por Weinhardt et al. (2018), para sanar o problema de condicionamento devido a inserção de vários níveis de enriquecimento. Os resultados obtidos por Weinhardt et al. (2018) mostraram que alterações brandas nos parâmetros de frequência das funções de enriquecimento dinâmico alteram substancialmente o condicionamento, permitindo resultados superiores em termos de acurácia. Outro método interessante de estabilização é o MEFG Ortonormalizado (MEFGO) (SILLEM; SIMONE; SLUYS, 2015), que consiste em aplicar processos de ortonormalização nas funções de partição da unidade. Os resultados do MEFGO levaram a ótimos condicionamentos, contudo uma desvantagem apresentada pelo MEFGO é a degeneração da solução de forma direta, sendo necessários pós processamentos para obter os resultados da solução aproximada.

Aplicações do MEFG e dos métodos baseados no MPU para análise dinâ-

mica foram inicialmente desenvolvidas por De-Bel, Villon e Bouillard (2005), Hazard e Bouillard (2007) e Arndt, Machado e Scremin (2010). Arndt (2009) aplicou o MEFG para análise de barras, vigas de Euler-Bernoulli, treliças e pórticos planos em vibração livre adquirindo resultados superiores ao MEF e o MC, além de apresentar a versão adaptativa do MEFG, obtendo altas taxas de convergência para frequências específicas. Torii (2012) estendeu o trabalho de Arndt (2009), aplicando o MEFG em estruturas reticuladas, bidimensionais e análises transientes, obtendo melhores resultados quando comparados com o MEF. Aplicações do GFEM para vigas de Euler-Bernoulli (SHANG; MACHADO; FILHO, 2016) e vigas de Timoshenko (HSU, 2016a) mostraram melhor eficiência numérica quando comparados com o MEF e sua formulação hierárquica. O trabalho desenvolvido por Freisleben (2019) reforça a eficiência do MEFG nos problemas de viga de Timoshenko para vibração livre e análise transiente. De-bella (2018) efetuou vários testes com análise transiente para elementos de barras e vigas utilizando o MEFG, verificando quais são os modos mais influentes na acurácia dos modelos. Estudos do condicionamento matricial para dinâmica das estruturas foram feitos por Petroli (2016), verificando relações do número de condição com os dígitos significativos utilizados na programação dos modelos para diversos problemas de vibração livre.



### 3 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Neste capítulo a Análise Isogeométrica (AIG) é detalhada no seu contexto teórico e de implementação. Os equacionamentos básicos da formação geométrica são abordados, bem como aspectos de mapeamento e implementação do método.

A Análise Isogeométrica (AIG) (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005) foi idealizada com o intuito de unificar o conceito geométrico proveniente do CAD com os ambientes de análise de problemas de valor de contorno. A ideia principal está na utilização das mesmas funções de construção geométrica do CAD, as quais também são utilizadas para a aproximação do problema matemático na análise (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

A principal motivação da AIG está na automatização da criação e refinamento de malha. Segundo Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) os algoritmos de malha do MEF utilizam o CAD como referência apenas para coletar os pontos de locação dos nós, não levando necessariamente a uma malha com geometria exata, além do procedimento automático de refinamento de malha ser limitado. Por outro lado a formulação do CAD apresenta algoritmos eficientes de refinamento automático de malha (PIEGL; TILLER, 1997), sem a necessidade de utilizar uma geometria de referência.

Outra vantagem apresentada pela AIG é o controle da continuidade das funções base, que está relacionada com o grau polinomial e parâmetros de divisão da malha que serão discutidos na próxima seção. O aumento na continuidade é comprovadamente uma vantagem para os métodos numéricos, visto que grande maioria das soluções possuem elevada regularidade e suavidade, em especial os problemas da dinâmica das estruturas, que apresentam soluções harmônicas de alta regularidade. A vantagem da suavidade das funções também impacta positivamente a formação da malha, principalmente nos problemas transientes ou iterativos que dependem diretamente da geometria. A influência da geometria na precisão do problema de

flambagem de estruturas de casca foi demonstrada por Stanley (1985), onde cascas cilíndricas com imperfeições de 1% apresentaram resultados com erros de até 20% na carga de flambagem final. Problemas numéricos de aerodinâmica e camada limite (BARTH, 1998) e de superfície de atrito entre corpos (LAURSEN, 2002) foram solucionados com uma melhor aproximação da geometria do elemento, utilizando polinômios quadráticos e cúbicos. O problema de atrito por contato com aproximação isogeométrica apresentou resultados precisos quando comparados com o MEF devido a melhor regularidade da malha (LORENZIS et al., 2011; TEMIZER; WRIGGERS; HUGHES, 2011).

Na dinâmica das estruturas, especialmente na análise de vibração livre de elementos unidimensionais, a AIG se destacou por apresentar espectros de frequência bem comportados, se comparados com o MEF (COTTRELL et al., 2006), ou seja, uma faixa mais representativa de frequências naturais ficou mais próxima do comportamento analítico. A AIG, quando comparada com o MEFG e com os métodos enriquecidos, também apresentou espectros de frequência mais vantajosos, competindo com o MEFG em termos de taxa de convergência e precisão para problemas de barras e vigas em vibração livre (RAUEN; MACHADO; ARNDT, 2017b). Uma discussão mais detalhada sobre o assunto será apresentada no final deste capítulo.

As seções a seguir descrevem os principais aspectos de aplicação da AIG, bem como as funções base e os detalhes de implementação do método.

### 3.1 AIG x MEF

A principal diferença entre a AIG e o MEF está no processo de discretização e formação de malha. O MEF utiliza o conceito de mapeamento isoparamétrico, partindo de um elemento local no espaço paramétrico aonde são definidas as funções de forma. A malha do problema de MEF é formada por finitos acoplamentos de elementos

locais mapeados, onde a discretização do método se dá no espaço físico do problema. As mesmas funções de forma definidas no elemento local são utilizadas para o mapeamento do elemento global. A figura 4 ilustra o esquema básico de formação da malha de MEF a partir do conceito isoparamétrico.

Já a AIG consiste em efetuar a discretização da malha no espaço paramétrico, definindo todas as funções de forma neste espaço e efetuando um mapeamento global para a malha que representa o domínio físico. Esta estratégia foi inicialmente utilizada nas construções geométricas do CAD. A figura 5 ilustra o esquema de formação de malha da AIG através da estratégia de mapeamento global.

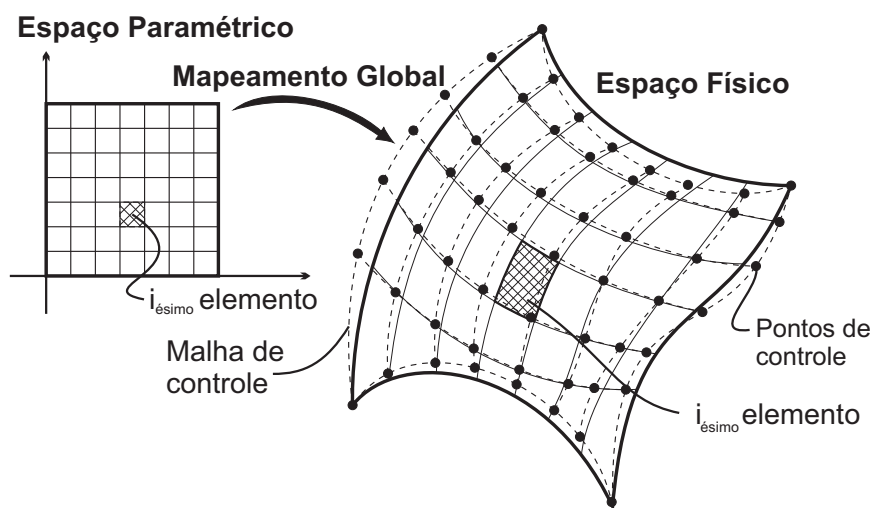


FIGURA 5 – ESQUEMA DE FORMAÇÃO DE MALHA DA AIG

Na solução de um problema matemático os valores nodais da resolução via MEF são atribuídos diretamente nos nós globais, o que não ocorre na AIG. As contribuições nodais da resolução via AIG são atribuídas nos pontos de controle, sendo necessária a interpolação com as funções base para se escrever o campo do problema em questão (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

### 3.2 B-SPLINES

As funções B-Splines são polinômios paramétricos que são utilizados como base da interpolação para uma geometria representativa. A divisão do espaço paramétrico para o mapeamento global e definição das funções B-Splines é feita através dos chamados *knots* que consistem em coordenadas no espaço paramétrico onde a divisão da malha é realizada. A literatura clássica de CAD usualmente divide o espaço paramétrico sob o domínio padrão  $\xi[0, 1]$ , onde na AIG este padrão também é adotado.

A formação de uma base de funções B-Splines depende essencialmente da distribuição dos *knots* e suas multiplicidades e do grau polinomial das mesmas. O vetor de *knots*  $\Xi$  consiste na disposição ascendente de cada *knot* considerando suas multiplicidades. Para um número  $n$  de funções B-Splines de grau  $p$  o vetor de *knots* é definido pela expressão:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1}\} \text{ com } \xi_i \geq \xi_{i+1} \quad (16)$$

A multiplicidade de um *knot* controla a continuidade das funções neste ponto. A propriedade da continuidade das B-Splines é demonstrada por Piegl e Tiller (1997), onde o número de derivadas contínuas em  $\xi_i$  é  $p - m_i$ , onde  $p$  é o grau polinomial da função e  $m_i$  a multiplicidade do *knot*  $\xi_i$ . Com o objetivo de que os pontos de controle das extremidades da geometria coincidam com ela mesma, a literatura CAD e também a AIG utilizam a notação padrão de vetor *knots* aberto, onde os *knots* da extremidade são repetidos  $p + 1$  vezes (FARIN, 2002).

Dado um vetor de *knots*  $\Xi$ , as funções B-Splines são construídas de maneira recursiva, iniciando com um grau polinomial  $p = 0$  até o grau polinomial  $p$  desejado. A iteração inicial para o polinômio  $p = 0$  é dada por (COX, 1972; DE-BOOR, 1972):

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad (17)$$

e para as próximas interações para  $p = 1, 2, 3, \dots$ :

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (18)$$

As equações 17 e 18 são conhecidas como fórmula recursiva de Cox-de Boor. A notação  $N_{i,p}$  indica a  $i$ -ésima função de ordem  $p$ . Para ilustrar a influência das multiplicidades dos *knots* na continuidade das funções, a figura 6 representa uma base de funções B-Splines de grau  $p = 2$  com vetor de *knots*  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$  onde as funções da extremidade apresentam continuidade  $C^{-1}$  nas bordas, e as funções internas  $C^1$  nos *knots*. Já a figura 7 mostra a base B-Splines para  $p = 2$  e  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$  é forçada uma continuidade do tipo  $C^0$  em  $\xi = 0.5$ , fazendo que com que este ponto seja repetido no vetor de *knots* para que esta propriedade ocorra.

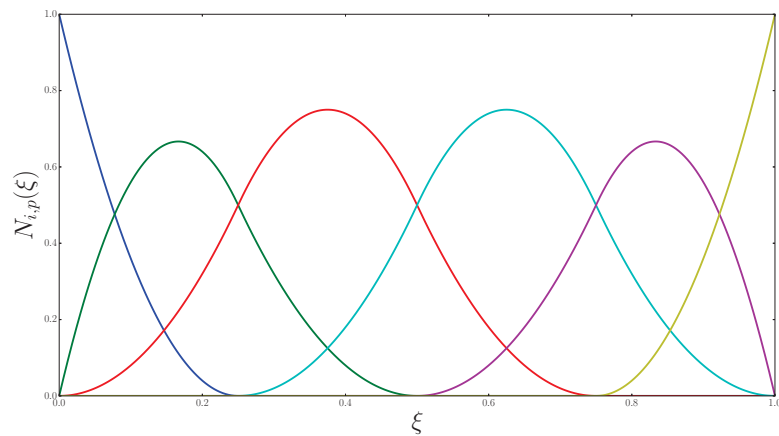


FIGURA 6 – FUNÇÕES BASE B-SPLINES COM  $P = 2$  E  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$

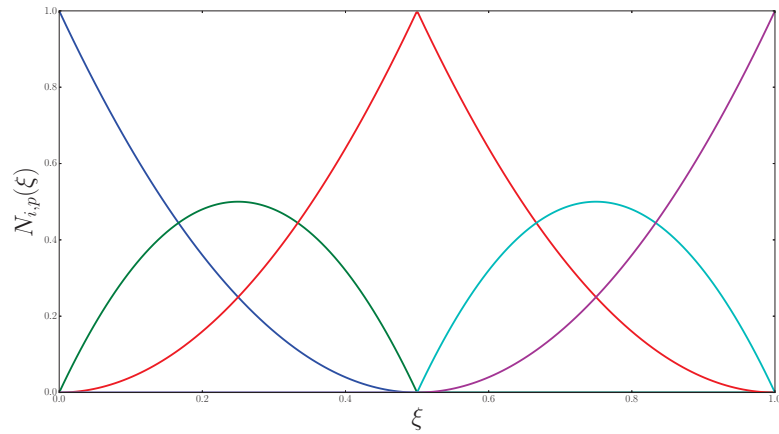


FIGURA 7 – FUNÇÕES BASE B-SPLINES COM  $P = 2$  E  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$

Duas propriedades importantes das B-Splines para a aplicação nos problemas matemáticos são a Partição da Unidade e o suporte compacto. Desse modo,

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1, \quad (19)$$

$$\text{supp}(N_{i,p}) = \{\xi \in [\xi_i, \xi_{i+p+1}] | N_{i,p} \neq 0\} \quad (20)$$

a função  $N_{i,p}$  é não nula no domínio  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ . Ambas as propriedades de partição da unidade e domínio do suporte são demonstradas por (PIEGL; TILLER, 1997). A propriedade do suporte ainda possui uma interessante vantagem que está relacionada com a integração seletiva na implementação de um método numérico. Como o domínio não nulo é previsível, pode-se determinar com facilidade quais são as posições matriciais as quais a integração dará um resultado nulo, evitando esforço computacional indevido.

As relações analíticas para as derivadas das funções B-Splines são também recursivas para dado vetor de *knots*  $\Xi$  e ordem polinomial  $p$ . A derivada primeira da  $i$ -ésima função B-Spline é dada pela expressão (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES,

2009; PIEGL; TILLER, 1997):

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (21)$$

Uma expressão generalizada para a  $k$ -ésima derivada da  $i$ -ésima função B-Spline é definida pela equação (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009; PIEGL; TILLER, 1997):

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left( \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left( \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right). \quad (22)$$

Algoritmos eficientes para a determinação das derivadas B-Splines são desenvolvidos por Farin (1999), com o objetivo de carregar um campo de derivadas com baixo custo computacional.

O desenvolvimento de geometrias bidimensionais no CAD requer a interpolação através de superfícies base B-Splines (FARIN, 1999). A geração destas funções requer divisão do espaço através dos *knots* em duas direções. No espaço paramétrico define-se vetor de *knots* na direção  $\xi$  com  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  e na direção  $\eta$  com  $\mathcal{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ , onde  $p$  e  $q$  são respectivamente as ordens polinomiais das B-Splines na direção  $\xi$  e na direção  $\eta$ , para  $n$  funções em  $\xi$  e  $m$  funções em  $\eta$ . Um conjunto de superfícies base B-Splines é então determinado pelo produto:

$$N_{i,j,p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta), \quad (23)$$

onde as funções  $N_{i,p}(\xi)$  e  $M_{j,q}(\eta)$  são determinadas através das expressões 17 e 18.

Para as superfícies base B-Splines as propriedades básicas que tangem as curvas unidimensionais são estendidas para duas dimensões. A partição da unidade é mantida e o domínio do suporte de uma superfície base  $N_{i,j,p,q}$  é o intervalo  $([\xi_i, \xi_{i+p+1}], [\eta_j, \eta_{j+q+1}])$ . A figura 8 mostra um exemplo de superfícies base B-Spline para os parâmetros  $p = q = 2$ ,  $\xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$  e  $\mathcal{H} = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ .

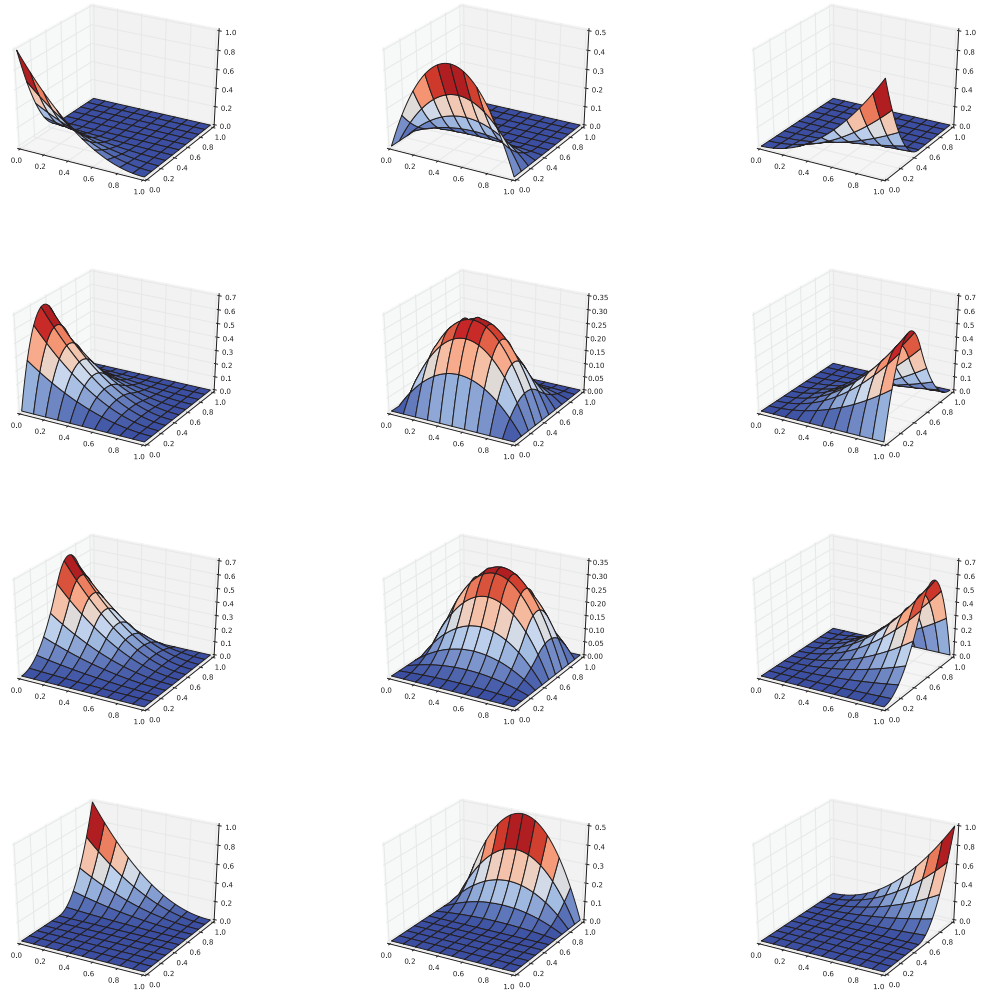


FIGURA 8 – EXEMPLO DE SUPERFÍCIES BASE B-SPLINES

### 3.3 NURBS

As funções NURBS (*Non uniform rational B-Splines*) são extensões das B-Splines com inserção do parâmetro de peso  $w_i$  (PIEGL; TILLER, 1997), o que confere uma maior flexibilidade nas construções geométricas (ROGERS, 2001). Cada função  $N_{i,p}$  carrega um parâmetro de peso  $w_i$  que interfere diretamente na construção geométrica. No caso unidimensional uma função NURBS é definida como (PIEGL; TILLER, 1997):

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}}^n N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}}. \quad (24)$$



No caso das superfícies NURBS, as funções  $N_{i,j,p,q}$  carregam parâmetros de peso  $w_{i,j}$  e são calculadas pelas expressão:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_i^n \sum_j^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}. \quad (25)$$

As funções NURBS utilizam as expressões 21 e 22 e a regra básica da diferenciação do quociente para computar um campo de derivadas. Algoritmos eficientes para a computação das derivadas NURBS foram desenvolvidas por Piegl e Tiller (1997).

### 3.4 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

A construção de uma geometria representativa no CAD utiliza a interpolação das funções NURBS com os pontos de controle definidos no espaço. Para uma base de  $n$  funções NURBS e um número  $n$  de pontos de controle  $B$ , uma curva NURBS é definida no espaço como (FARIN, 2002; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009):

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)B_i, \quad (26)$$

onde  $B_i$  representa o  $i$ -ésimo ponto de controle, atrelado à  $i$ -ésima função NURBS  $R_i^p$ . Quando os pontos de controle são definidos no espaço bidimensional, o procedimento leva um par ordenado de coordenadas  $(X, Y)$ . Sob o ponto de vista vetorial a expressão 26 pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} X(\xi) \\ Y(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)X_i \\ \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)Y_i \end{bmatrix}, \quad (27)$$

onde  $X_i$  e  $Y_i$  representam as coordenadas do  $i$ -ésimo ponto de controle, e  $X(\xi)$ ,  $Y(\xi)$  são as funções independentes em  $(X, Y)$  que representam a geometria do objeto

representativo. A figura 9 representa um círculo obtido através das curvas NURBS com os respectivos pontos e a malha de controle.

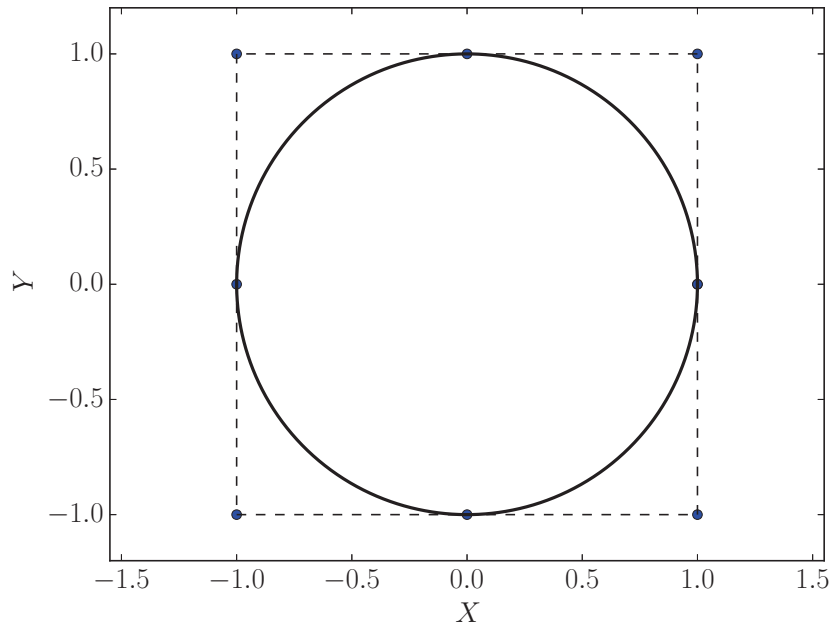


FIGURA 9 – EXEMPLO DE CURVA NURBS

A malha de controle possui a propriedade importante de delimitar a envoltória convexa da geometria em questão. Há garantia de que as curvas paramétricas representadas pelas NURBS estão contidas na envoltória convexa (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009; PIEGL; TILLER, 1997). Com a satisfação desta propriedade alguns aspectos de estabilidade da AIG para refinamento  $h$  são demonstrados por Bazilevs et al. (2011), além da construção de algoritmos para adaptação de curvas com B-Splines utilizando esta propriedade (ZHANG et al., 2010).

No caso das superfícies NURBS, a construção de uma geometria representativa é realizada através da interpolação das superfícies base NURBS com pontos de controle no espaço. Uma superfície é definida pela seguinte expressão:

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j}, \quad (28)$$

onde  $\mathbf{S}$  representa uma função de duas variáveis no caso bidimensional e uma função

de três variáveis no caso tridimensional, e  $B_{i,j}$  representa o ponto de controle atrelado a função  $R_{i,j}^{p,q}$ . A figura 10 ilustra uma superfície NURBS em formato de anel, mostrando também os pontos e a malha de controle, bem como as divisões da malha geométrica nos *knots*. As propriedades da envoltória convexa são mantidas nas malha de dimensões superiores (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

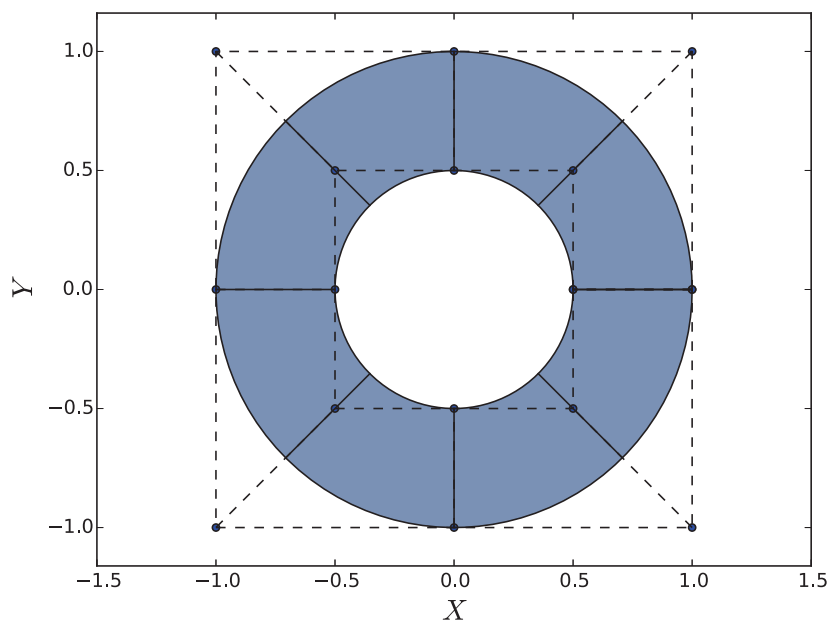


FIGURA 10 – EXEMPLO DE SUPERFÍCIE NURBS

### 3.5 REFINAMENTOS

Os procedimentos naturais de refinamento na AIG consistem em modificar os parâmetros de subdivisão e a ordem polinomial a fim de construir malhas mais densas ou funções mais suaves para melhorar a acurácia dos resultados numéricos (COTTRELL; HUGHES; REALI, 2007). Os principais tipos de refinamento na AIG são o refinamento  $h$  que consiste em aumentar o número de subdivisões mantendo a ordem polinomial, o refinamento  $p$  que consiste no aumento da ordem polinomial mantendo a continuidade das funções nos *knots* e o refinamento  $k$  que consiste em

aumentar a ordem polinomial incrementando a continuidade das funções nos *knots*.

O refinamento  $h$  consiste no incremento da quantidade de *knots* sem modificar a ordem polinomial. A partir de um vetor de *knots*  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ , para  $r$  *knots* adicionais o vetor de *knots* é estendido na forma  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+r+p+1}\}$ , sendo que os *knots* adicionais devem ser locados de forma a respeitar a ordem ascendente no vetor  $\Xi$ . As funções são então reconstruídas, o que significa que os procedimentos de refinamento na AIG não são naturalmente hierárquicos, contudo metodologias de refinamento adaptativo são desenvolvidas por Dittmann (2017) e Chen, Lingen e Borst (2017) através de modificações nos processos naturais de construção das NURBS. A figura 11 apresenta um exemplo de refinamento  $h$  sob o ponto de vista das funções base, onde a partir de uma base com  $p = 2$  e  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$  são adicionados os *knots* 0.25, 0.75 para a base refinada com  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$ .

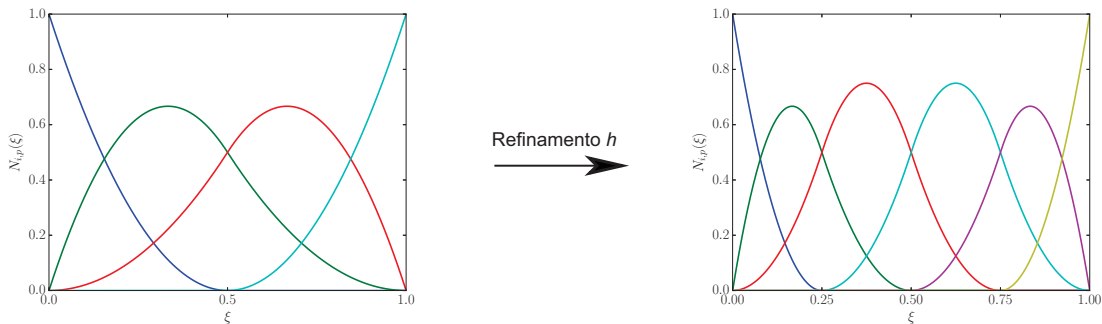


FIGURA 11 – EXEMPLO DE FUNÇÕES BASE NO REFINAMENTO  $h$

Já o refinamento  $p$  consiste em aumentar o grau polinomial da base a fim de manter a continuidade das funções nos *knots*. Tal procedimento muitas vezes é necessário para manter um padrão geométrico que necessite de continuidades específicas em certos pontos. Para que a continuidade seja mantida, além aumentar o grau polinomial, a multiplicidade dos *knots* é incrementada na mesma quantidade do número de incrementos do grau polinomial. A figura 12 mostra um procedimento de refinamento  $p$  a partir de uma base com  $p = 2$  e  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$  para uma base com  $p = 3$  e  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 1, 1, 1, 1\}$ . É possível notar que todos os *knots* ganharam incrementos na sua multiplicidade a fim

de manter a continuidade nestes pontos. As funções na figura 12 mostram claramente a continuidade  $C^0$  no *knot* 0.5, a qual é mantida após o refinamento.

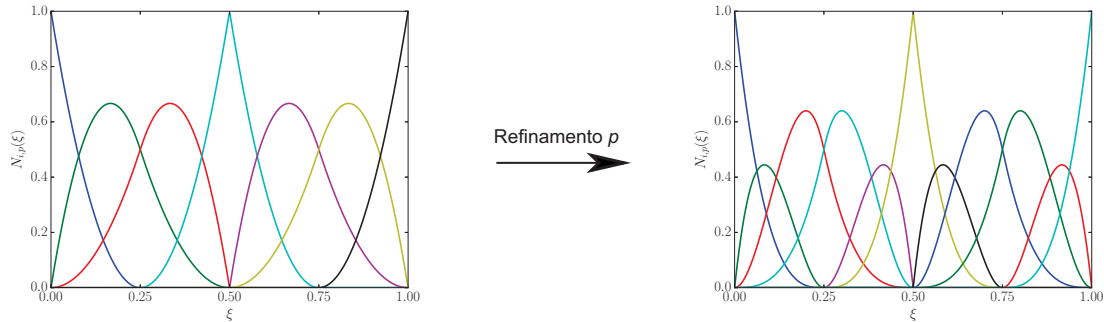
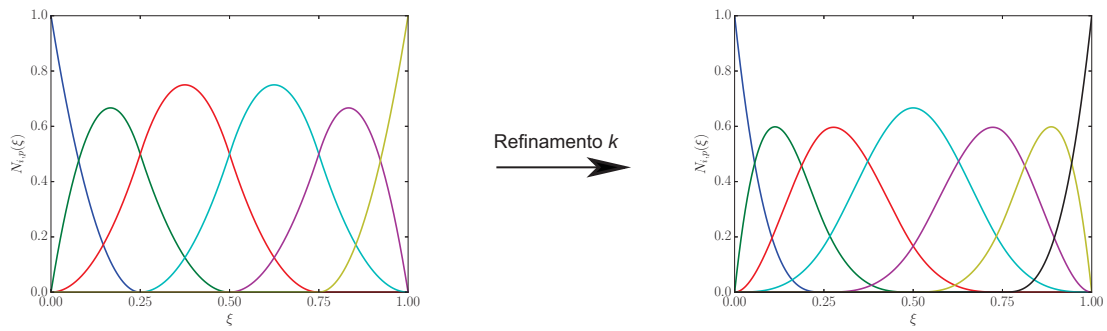


FIGURA 12 – EXEMPLO DE FUNÇÕES BASE NO REFINAMENTO  $P$

O refinamento  $k$  consiste em incrementar a ordem polinomial  $p$  sem se preocupar em manter a continuidade nos *knots*. Como o procedimento não incrementa a multiplicidade dos *knots*, a continuidade das funções nos *knots* é aumentada. Segundo Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Cottrell, Hughes e Reali (2007) este procedimento é mais vantajoso devido ao fato das funções de interpolação na AIG com o refinamento  $k$  terem sua suavidade aumentada, o que aprimora a acurácia de soluções regulares. Na dinâmica das estruturas a vantagem do refinamento  $k$  foi mostrada por Rauen, Machado e Arndt (2017b) para problemas de barras e vigas, onde o refinamento  $k$  para frequências naturais de vibração obteve taxas de convergência similares ao refinamento  $p$ , mas com menor número de graus de liberdade. A figura 13 mostra um exemplo de refinamento  $k$  a partir de um conjunto com  $p = 2$  e  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$  para uma base com  $p = 3$  e  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1, 1\}$ .

Uma vantagem das malhas formadas a partir das NURBS é que a malha de controle e os pesos para uma geometria de referência são automaticamente definidos em um refinamento. Algoritmos eficientes para o cálculo dos novos pesos e pontos de controle de uma geometria são desenvolvidos por Piegl e Tiller (1997) a partir de simplificações da equação geral das curvas e superfícies, assumindo que:

FIGURA 13 – EXEMPLO DE FUNÇÕES BASE NO REFINAMENTO  $K$ 

$$(\mathbf{C}(\xi))_{\text{antes do refinamento}} = (\mathbf{C}(\xi))_{\text{após o refinamento}}, \quad (29)$$

para curvas e:

$$(\mathbf{S}(\xi, \eta))_{\text{antes do refinamento}} = (\mathbf{S}(\xi, \eta))_{\text{após o refinamento}}, \quad (30)$$

para superfícies. Ainda segundo Piegl e Tiller (1997) a resolução direta das equações 29 e 30 pode levar a rotinas ineficientes do ponto de vista computacional. Os algoritmos específicos para o refinamento  $h$  e  $p$  de curvas e superfícies são dados em detalhes por Piegl e Tiller (1997) sendo o refinamento  $k$  procedido através de um refinamento  $p$  seguido de um refinamento  $h$ . A figura 14 apresenta um exemplo de refinamento  $h$  de uma curva circular e a figura 15 apresenta um exemplo de refinamento  $p$  para uma superfície anelar.

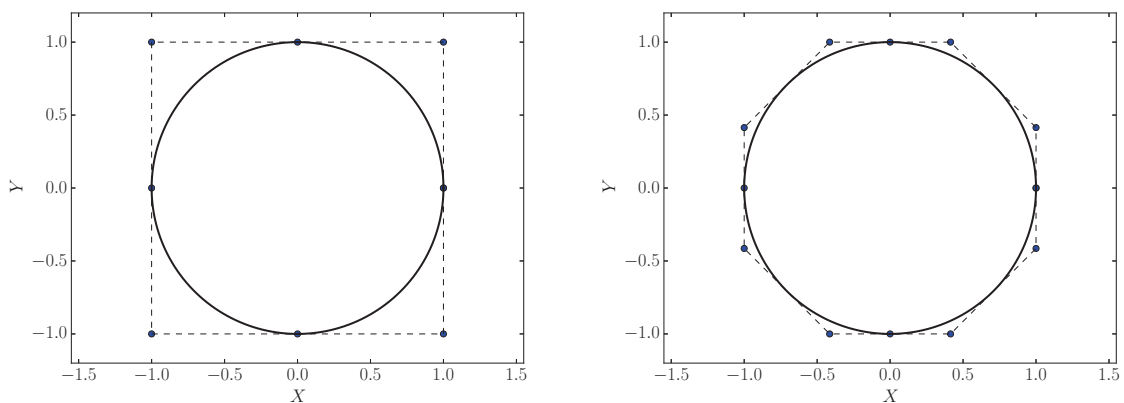


FIGURA 14 – EXEMPLO DE UM REFINAMENTO PARA CURVAS NURBS

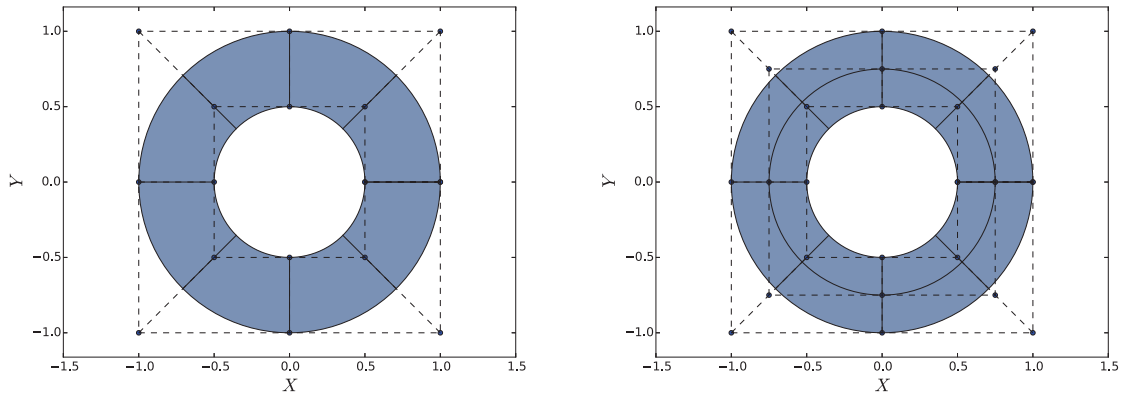


FIGURA 15 – EXEMPLO DE UM REFINAMENTO PARA SUPERFÍCIES NURBS

As expressões para as derivadas das curvas e superfícies NURBS dependem diretamente das derivadas das funções NURBS. Visto que as curvas e superfícies são escritas como combinação linear das funções e pontos de controle, as expressões para as derivadas podem ser escritas como:

$$\frac{d\mathbf{C}}{d\xi} = \sum_{i=1}^n \frac{dR_i^p}{d\xi} \mathbf{B}_i, \quad (31)$$

para as curvas e

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}}{\partial \xi} \mathbf{B}_{i,j}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}}{\partial \eta} \mathbf{B}_{i,j}, \quad (33)$$

para as superfícies.

### 3.6 IMPLEMENTAÇÃO DA AIG EM PROBLEMAS LINEARES

A formulação para a implementação da AIG se dá a partir do Método dos Resíduos Ponderados. A implementação mais usual da AIG utiliza a formulação de

Bubnov-Galerkin para a formação das sentenças numéricas (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009), contudo métodos de colocação foram formulados e testados por Auricchio et al. (2010) obtendo resultados precisos, especialmente para o refinamento  $k$ . A extensão do método da colocação para AIG foi desenvolvida por Auricchio et al. (2012) em problemas de elasticidade linear.

As funções NURBS satisfazem os requisitos básicos para a partição da unidade, garantindo, portanto, existência e unicidade de uma solução aproximada  $\mathbf{u}^h$ , além de aspectos de convergência. Estudos sobre a estabilidade numérica e convergência para refinamento  $h$  na AIG foram feitos por Bazilevs et al. (2006) que provaram condições de não extrapolação do erro para aproximações com funções NURBS. Para um PVC aplicado em um domínio  $\Omega$  uma solução de interesse  $\mathbf{u}$  pode ser aproximada pelas NURBS através de uma combinação linear na forma:

$$\mathbf{u}^h(X, Y) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{u}_i, \quad (34)$$

para problemas unidimensionais e

$$\mathbf{u}^h(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q} R_i^p(\xi, \eta) \mathbf{u}_{i,j}, \quad (35)$$

par problemas bidimensionais, onde  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{u}_{i,j}$  representam as contribuições nodais para os casos 1D e 2D respectivamente.

O processo de discretização através das expressões 34, 35 aplicado nas sentenças de resíduos ponderados que conduzem às matrizes necessárias para a obtenção de  $\mathbf{u}^h$ . Em uma gama de problemas lineares estas matrizes podem ser representadas pela expressão:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{D}}u) \cdot (\bar{\mathbf{D}}w) d\Omega, \quad (36)$$

onde  $\bar{\mathbf{D}}$  representa um operador diferencial característico do problema. Ao



aplicar o método de Bubnov-Galerkin, os espaços de funções de interpolação para  $u$  e  $w$  são idênticos e para uma base  $\mathbf{R}^p$  de funções NURBS a equação 36 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{D}}\mathbf{R}^p) \cdot (\bar{\mathbf{D}}\mathbf{R}^p) d\Omega. \quad (37)$$

A obtenção das contribuições nodais  $\mathbf{u}_{i,j}$  se dá através da resolução de sistemas lineares para o caso das equações elípticas e algumas equações transientes, na forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (38)$$

onde  $\mathbf{u}^h$  é o vetor contendo as contribuições nodais e  $\mathbf{f}$  é o vetor contendo contribuições do termo independente.

### 3.6.1 Mapeamento

As funções NURBS são definidas no espaço paramétrico que não representa diretamente o domínio físico  $\Omega$ . Mesmo que as expressões de interpolação nas formas das equações 34 e 35 sejam escritas no espaço paramétrico, as contribuições nodais para a combinação linear do campo são obtidas no espaço físico. Ao comparar as equações 34 e 35, que representam as interpolações do campo  $\mathbf{u}^h$  com as equações de mapeamento 26 e 28, é possível observar que ambos os campos da solução e geometria são combinações lineares compatíveis que utilizam o mesmo espaço de funções  $\mathbf{R}^p$ , o que é uma característica notável no conceito da AIG (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005).

As equações do CAD asseguram mapeamento um a um, com continuidade regulada pelas funções  $\mathbf{R}^p$ . O que é uma importante propriedade para a AIG, visto que

a regularidade do mapeamento e a existência do mapeamento inverso são garantidas. Importantes consequências para o mapeamento geométrico são discutidas por Piegl e Tiller (1997) e um aspecto variacional é abordado por Bezhaev e Vasilenko (2001).

Com as expressões de mapeamento provenientes do CAD as matrizes características do problema são escritas na forma local por:

$$\mathbf{K} = \int_0^1 (J^{-1}(\bar{\mathbf{D}})\mathbf{R}^p) \cdot (J^{-1}(\bar{\mathbf{D}})\mathbf{R}^p) d\xi d\eta \det(J). \quad (39)$$

onde  $J$  representa a função de mapeamento contendo operadores de mudança de variáveis. Para o caso geral bidimensional têm-se:

$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (41)$$

sendo a matriz  $J$  obtida através da construção CAD.

Para o caso unidimensional a construção de uma malha em AIG se dá através de uma integral de linha, com:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \xi} = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)^2} \quad (42)$$

Segundo Farin (2002) a escolha dos pontos de colocação no espaço paramétrico podem levar a expressões diferentes na função de mapeamento. Os pontos de colocação clássicos são equidistantes no espaço paramétrico, que levam a uma expressão não linear da função de mapeamento (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009). Uma opção largamente utilizada é a colocação dos pontos nas chamadas *Abcissas de Greville*, que gera funções de mapeamento do tipo lineares, sendo os pontos de colocação determinados por (FARIN, 1999):

$$\xi_i(\Xi) = \frac{\xi_{i+1} + \dots + \xi_{i+p}}{p}. \quad (43)$$

O trabalho de Kolman, Plešek e Okrouhlík (2014) mostra que a escolha dos pontos de colocação pode interferir nos resultados numéricos, sendo que a formulação Isogeométrica com Abcissas de Greville obteve resultados superiores em termos de erro de dispersão de ondas, quando comparado com o MEF e a AIG com pontos de colocação equidistantes.

### 3.6.2 Integração

Na AIG os pontos de integração para a obtenção das sentenças numéricas são definidos no espaço paramétrico. Devido as características paramétricas dos polinômios que formam as B-Splines e pelo mapeamento ponto a ponto, há a necessidade de distribuir pontos de integração em todos os intervalos entre *knots* (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005). A solução padrão no caso do problema de integração consiste em efetuar quadratura Gaussiana com  $p + 1$  pontos em cada subdomínio contido no suporte. Contudo segundo Hughes, Reali e Sangalli (2010) o processo de integração por quadratura gaussiana separada por subdomínios, apesar de levar ao valor exato da integral leva a um desempenho computacional ineficiente. Hughes, Reali e Sangalli (2010) concluíram que espaços com continuidade maior requerem um menor número de pontos de integração e desenvolveram algoritmos para obtenção de quadraturas otimizadas, com base nas próprias funções B-Splines através das técnicas de quadratura generalizada. Os resultados obtidos por Hughes, Reali e Sangalli (2010) mostraram uma redução de pontos necessários para a integral analítica, quando comparados com a quadratura de Gauss. Contudo o próprio algoritmo de obtenção da quadratura demanda um alto esforço computacional para polinômios de alta ordem e para uma quantidade grande de subintervalos, além da necessidade dos pontos e pesos serem recomputados para cada novo número de subdivisões.

Outro algoritmo para a determinação dos pontos e pesos eficientes para a integração das NURBS foi proposto por Auricchio et al. (2012). Este algoritmo utiliza como artifício a homogeneidade das NURBS no interior do domínio e utiliza a translação destas funções para obter um conjunto de pontos e pesos para a integração exata. A principal vantagem deste algoritmo é que os pontos e pesos não precisam ser recomputados para uma variação na quantidade de subdivisões. Contudo este algoritmo exige um tratamento especial nas fronteiras do domínio e é válido apenas para malhas uniformes. Os resultados obtidos por Auricchio et al. (2012) em termos de eficiência da quadratura são muito próximos dos desenvolvidos por Hughes, Reali e Sangalli (2010), sendo os resultados de Hughes, Reali e Sangalli (2010) ligeiramente mais eficientes.

Hillman, Chen e Bazilevs (2015) desenvolveram um método de integração eficiente com base na penalização da forma fraca da equação diferencial em questão. Esta metodologia inicialmente proposta por Chen, Hillman e Rüter (2013) para os métodos sem malha, foi desenvolvida para melhorar o desempenho computacional de integrações polinomiais de alta ordem. A adaptação deste método, obteve resultados similares aos propostos por Hughes, Reali e Sangalli (2010).

Outras metodologias de integração específicas foram desenvolvidas. Destacam-se os estudos sobre métodos de integração para curvas bidimensionais NURBS (SEVILLA; FERNÁNDEZ-MÉNDEZ, 2011) e a metodologia de integração utilizando interpolação B-Splines (MANTZAFLARIS; JÜTTLER, 2015).

### 3.7 AIG NA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Os primeiros resultados obtidos pela AIG na dinâmica das estruturas foram desenvolvidos por Cottrell et al. (2006) que mostraram espectros de frequência bem comportados quando comparados com o MEF, especialmente para o problema unidi-

mensional de barras e vigas. Uma extensão destes resultados foi desenvolvida por Rauen, Machado e Arndt (2017b) para problemas de barras, vigas e treliças com a AIG sendo comparada com o MEF e os métodos enriquecidos. Os resultados obtidos por Rauen, Machado e Arndt (2017b) mostraram espectros de frequência mais bem comportados se comparados com o MEF e com o GFEM. As figuras 16 e 17 mostram respectivamente os resultados apresentados pelo MEF e pela AIG para os espectros de frequência até grau polinomial  $p = 10$ . É possível observar que o MEF apresenta saltos nos espectros que levam a maiores erros, a partir da metade da amostra de frequências conforme já visto na figura 16. Já a AIG apresenta saltos apenas no final do espectro, mantendo em torno de 90% da região em faixa mais precisa tal como ilustrado na Figura 17. O mesmo problema foi desenvolvido por Arndt e Machado (2013) para MEF com polinômios de Lobatto e o MEFG, também apresentando saltos de acurácia a partir da metade da amostra. Note-se que o MEFG apresentou resultados iguais ao MEF com polinômios de grau 5, reforçando a vantagem da AIG com relação aos espectros de frequência.

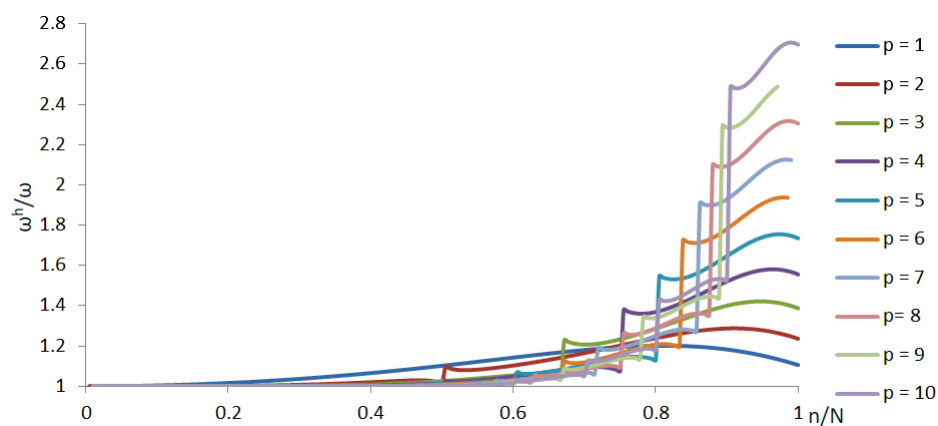


FIGURA 16 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO MEF PARA O PROBLEMA DE BARRA  
 FONTE: Rauen, Machado e Arndt (2017b)

Com relação às taxas de convergência das frequências naturais de vibração para o problema de barras, a AIG apresentou resultados superiores ao MEF  $h$  e aos métodos enriquecidos sendo competitivo com o MEFG e o MEF  $p$ . A figura 19 mostra os erros relativos do MEF, MMA, MC e MEFG desenvolvidos por Arndt (2009) e da AIG desenvolvidos por (RAUEN, 2014). É possível observar uma alta taxa de convergência

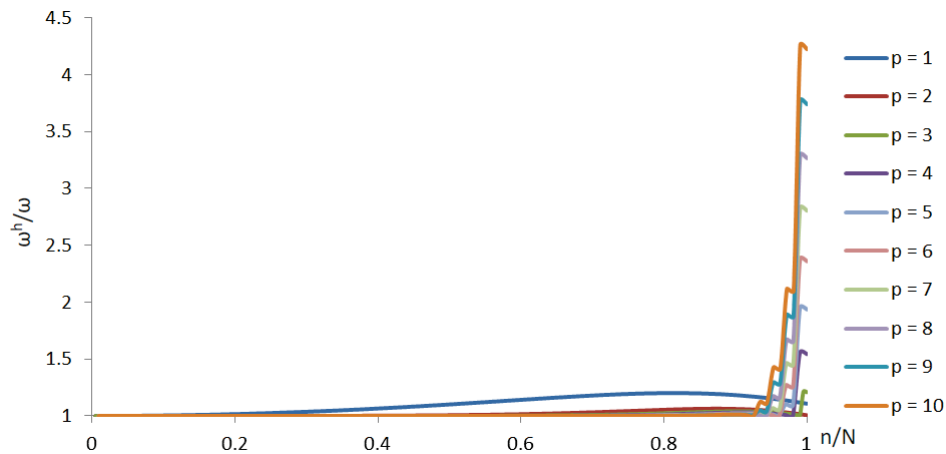


FIGURA 17 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO AIG PARA O PROBLEMA DE BARRA  
 FONTE: Rauen, Machado e Arndt (2017b)

para o MEEG, MEF  $p$  e a AIG  $k$  e também a vantagem da AIG  $k$  sobre a AIG  $p$  em termos de acurácia.

A AIG foi utilizada na modelagem de placas finas (SHOJAEE et al., 2012) com o elemento de rotação livre, obtendo resultados precisos se comparados com outros métodos numéricos e soluções analíticas. O problema de vibração de placas foi desenvolvido por Thai et al. (2012) obtendo melhores resultados do que o MEF e outros métodos numéricos quando comparados com soluções analíticas. Wang, Liu e Zhang (2015) aplicaram uma metodologia para obtenção de matrizes com alta ordem polinomial utilizando AIG para problemas de viga e placa fina apresentando alta convergência. Já Luu, Kim e Lee (2015) desenvolveram e testaram a formulação da AIG para vigas de Timoshenko com forma livre, obtendo resultados satisfatórios, sendo o efeito do travamento por cisalhamento atenuado com o aumento do grau polinomial.

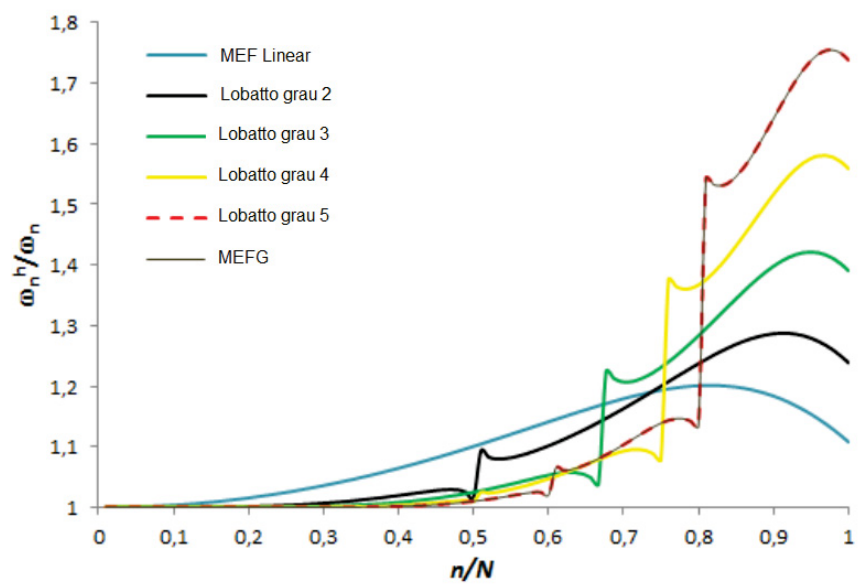


FIGURA 18 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO MEFG PARA O PROBLEMA DE BARRA  
 FONTE: Arndt e Machado (2013)

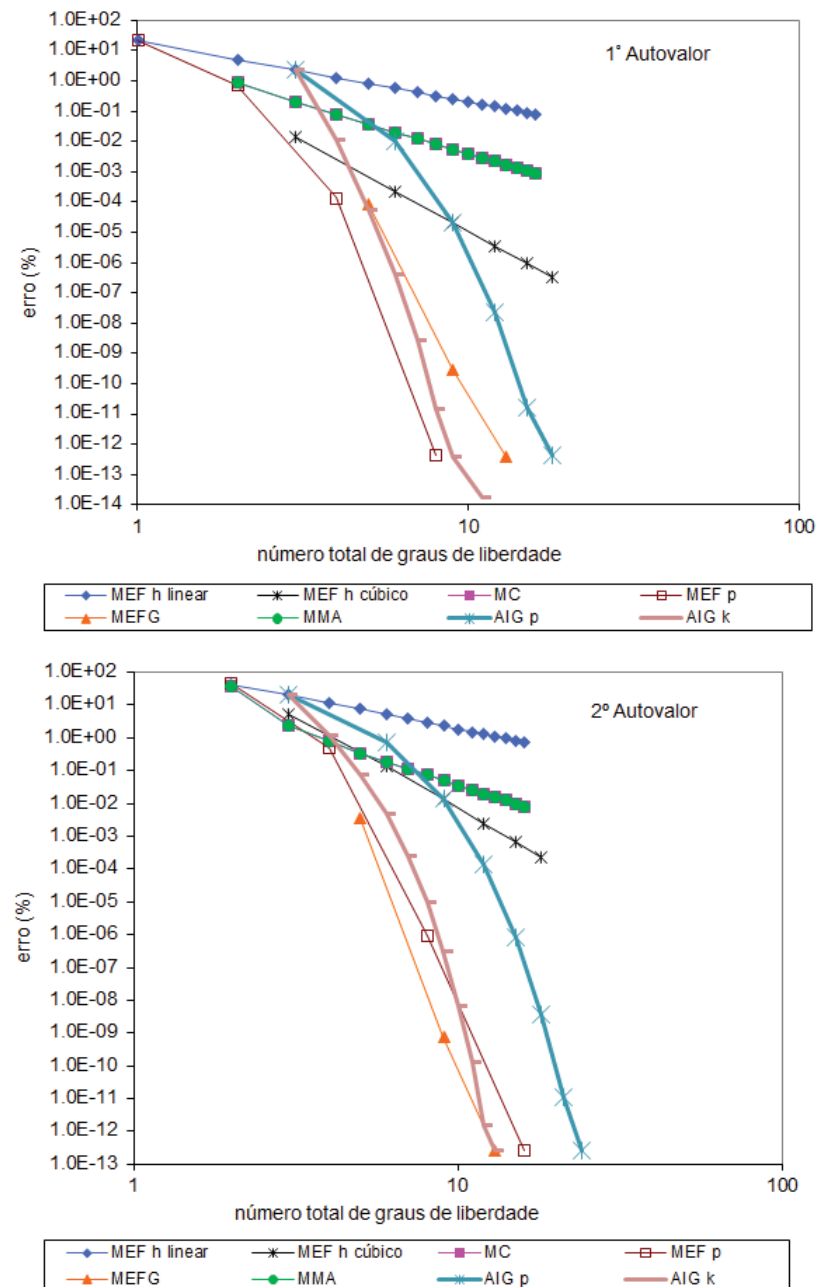


FIGURA 19 – ERROS RELATIVOS DOS DOIS PRIMEIROS AUTOVALORES DO PROBLEMA DE BARRA

FONTE: Rauen, Machado e Arndt (2017b)



## 4 FORMULAÇÃO VARIACIONAL DOS PROBLEMAS DINÂMICOS

Neste capítulo detalhes das formulações teóricas dos problemas de barra, viga, estado plano e propagação de ondas são desenvolvidos. O enfoque abordado nestas formulações aborda o mapeamento CAD, para ser aplicado na AIG pura e suas formulações enriquecidas.

### 4.1 BARRA AXIAL

O primeiro problema a ser tratado é o de uma barra axial sujeita a deformações axiais. Trata-se de um elemento estrutural muito simples, mas muito aplicado em problemas de Engenharia. A simplicidade deste modelo é reforçada pela existência de soluções analíticas, especialmente em problemas de vibrações livres. Graças à tais soluções, este elemento é muito recomendável para testes computacionais. Sendo assim, uma barra é composta de uma haste retilínea com deformação axial. A formulação clássica de barras admite que o material seja elástico linear e homogêneo e ainda que uma seção plana e normal da barra antes do carregamento permanece normal e plana depois do carregamento (PETYT, 2010; ARNDT, 2009). Espera-se que ação da excitação externa  $p(C, t)$  e da força inercial  $f_i(C, t)$  gerem respostas de deslocamentos  $u(C, t)$  e forças normais  $N(C, t)$  ao longo do comprimento  $C$  do elemento de forma a respeitar os princípios de equilíbrio e também as condições de compatibilidade do problema. A figura 20 representa o diagrama de forças e deslocamentos em um segmento diferencial representativo do elemento de barra. O elemento de barra ainda admite campo de deformações  $\epsilon_C$  na forma:

$$\epsilon_C = \frac{du}{dC}, \quad (44)$$

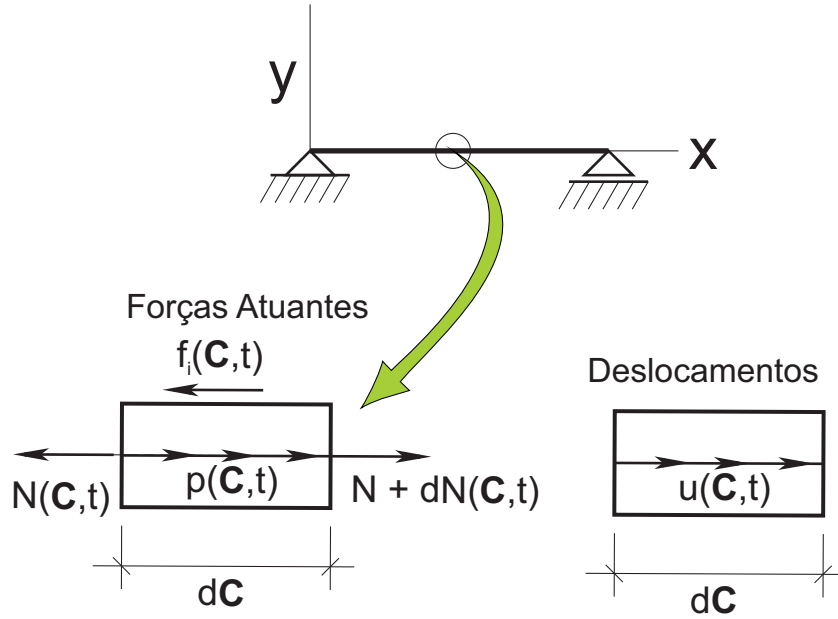


FIGURA 20 – DIAGRAMA DE CORPO LIVRE E GRAUS DE LIBERDADE DINÂMICOS EM UM ELEMENTO DE BARRA

onde  $C$  representa o domínio retilíneo, sendo a deformação determinada no sentido do eixo principal.

A equação diferencial que rege o problema dinâmico das barras na ausência de efeitos dissipativos pode ser obtida através do equilíbrio das forças mostrado na figura 20 ou pelo princípio de Hamilton e é dada por (PETYT, 2010; HUGHES, 2012):

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial C} \left( EA \frac{\partial u}{\partial C} \right) = p(C, t) \quad (45)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do material,  $A$  é a área da seção transversal,  $E$  o módulo de elasticidade.

As condições de contorno do problema de barra são estabelecidas pelos vínculos de apoio que dependem da característica do problema. Para um apoio fixo, as condições de contorno são do tipo essenciais na forma:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e/ou} \quad u(L, t) = 0, \quad (46)$$

onde  $L$  denota o comprimento da barra, sendo, portanto, as condições aplicadas nas duas extremidades da barra. Para um apoio livre, as condições de contorno são do tipo naturais na forma:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial C} \right|_{\xi=0} \text{ e/ou } \left. \frac{\partial u}{\partial C} \right|_{\xi=1}, \quad (47)$$

sendo possível a combinação entre as condições de contorno fixa e livre. Formas mistas de condições de contorno para barras são abordadas por Becker, Carey e Oden (1983) para condições de apoio elástico e com massa concentrada.

A formulação variacional do problema é desenvolvida através da projeção de um espaço de funções independentes do tempo,  $w(C)$ , a fim de descrever um campo espacial com os graus de liberdade sendo escritos em função do tempo  $t$ . Esta formulação é denominada semi-discreta e é largamente utilizada nos problemas de dinâmica (CAREY; ODEN, 1984; ARNDT, 2009). Aplicando-se o Método dos Resíduos Ponderados na equação 45, tem-se:

$$\int_C \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w dC - \int_C \frac{\partial}{\partial C} \left( EA \frac{\partial u}{\partial C} \right) w dC = \int_C p w dC. \quad (48)$$

Integrando o segundo termo da equação 48 por partes, a sentença se transforma em:

$$\int_C \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w dC - \left[ w EA \frac{\partial u}{\partial C} \right]_0^L - \int_C \left( EA \frac{\partial u}{\partial C} \right) \frac{\partial w}{\partial C} dC = \int_C p w dC. \quad (49)$$

Para quaisquer combinações de condições de contorno, o segundo termo da equação 49 se anula, desde que as funções de ponderação satisfaçam as condições de contorno do problema. Segundo Cheng (2001) problemas de vibração podem ser escritos através de um produto de funções escritas no espaço e no tempo separadamente, um campo de deslocamentos  $u$  pode ser escrito através da separação de

variáveis como:

$$u(C, t) = u(C) \cdot T(t) \quad (50)$$

sendo  $u(C)$  e  $T(t)$  funções escritas no espaço e no tempo, respectivamente. A equação 49 pode então ser reescrita na forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (51)$$

onde  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  representam formas bilineares carregando respectivamente a contribuição de massa e de rigidez do problema. O vetor  $\mathbf{f}$  representa as contribuições de força atuantes. As formas bilineares para massa e rigidez e o vetor de forças são dados por:

$$\mathbf{M}(u, w) = \int_C \rho A u w dC \quad (52)$$

$$\mathbf{K}(u, w) = \int_C EA \frac{\partial u}{\partial C} \frac{\partial w}{\partial C} dC \quad (53)$$

$$\mathbf{f}(w, C, t) = \int_C p(C, t) w dC \quad (54)$$

A resolução numérica para o sistema está em escrever expressões aproximadas para os espaços  $u$  e  $w$ . Através do método de Galerkin, admite-se que as funções que interpolam a solução  $u$  são as mesmas que ponderam o resíduo  $w$ . Desta maneira, para a AIG, uma combinação linear do campo de deslocamentos é escrito na forma (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009; RAUEN; MACHADO; ARNDT, 2017b):

$$u^h(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) u_i, \quad (55)$$

onde  $u^h$  é o campo de deslocamentos aproximado de  $u$ .

Ao aplicar a equação 55 nas equações 52, 53 e 54 obtêm-se as sentenças numéricas para as matrizes de massa, rigidez e o vetor de forças dados por:

$$M_{i,j} = \int_C \rho A R_{i,p} R_{j,p} dC \quad (56)$$

$$K_{i,j} = \int_C EA \frac{\partial R_{i,p}}{\partial C} \frac{\partial R_{j,p}}{\partial C} dC \quad (57)$$

$$f_i = \int_C p(C, t) R_{i,p} dC \quad (58)$$

#### 4.1.1 Problema de Vibração Livre

O fenômeno de vibração livre ocorre na ausência de excitações externas transientes, nos quais  $f = 0$ . Segundo Carey e Oden (1984) problemas de vibração admitem solução geral na forma:

$$u(C, t) = e^{i\omega t} u(C) = ((\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)) u(C), \quad (59)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural de vibração da estrutura e  $u(C)$ , nos casos de vibração livre, corresponde ao formato do modo vibração. Ao substituir a solução geral na equação 51 e derivar duas vezes em relação a equação 59 no termo de massa, após algumas simplificações, o problema de vibração livre recai em um problema de autovalores generalizados:

$$\mathbf{K}u = \lambda \mathbf{M}u, \quad (60)$$

onde  $\lambda = \omega^2$  é o autovalor obtido do problema, relacionado com a frequência natural de vibração e  $u$  é o autovetor, relacionado com o modo de vibração da estrutura. Ao atribuir um método numérico para o problema, as frequências e os modos naturais e vibração são aproximados, cuja acurácia depende do espaço de funções de aproximação empregado. O problema de autovalores utiliza as equações 56 e 57 a fim de encontrar soluções aproximadas na forma:

$$\mathbf{K}u^h = \lambda^h \mathbf{M}u^h, \quad (61)$$

onde o par  $(\lambda^h, u^h)$  corresponde ao autovalor e autovetor aproximado para o problema, relacionado respectivamente à frequência e ao modo de vibração aproximado.

#### 4.1.2 Forma Local

Usualmente as integrações das matrizes de massa, e de rigidez e o vetor de forças são feitas no espaço paramétrico. Na AIG as integrais podem ser feitas ponto a ponto de maneira global, visto que há uma relação direta um-a-um entre o espaço paramétrico e o físico. No caso unidimensional a relação entre os dois espaços denota-se por  $J$ , isto é, o Jacobiano do problema, dado por:

$$J(\xi) = \frac{\partial C}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{\partial X^2}{\partial \xi} + \frac{\partial Y^2}{\partial \xi}}. \quad (62)$$

Visto que as derivadas das curvas NURBS são feitas no espaço paramétrico, o número de mapeamento  $J$  é escrito em função de  $\xi$ , logo as equações 56, 57 e 58 podem ser reescritas na forma local:

$$M_{i,j} = \int_0^1 \rho A R_{i,p} R_{j,p} J(\xi) d\xi, \quad (63)$$

$$K_{i,j} = \int_0^1 EA \frac{\partial R_{i,p}}{\partial \xi} \frac{\partial R_{j,p}}{\partial \xi} \frac{1}{J(\xi)} d\xi, \quad (64)$$

$$f_i = \int_0^1 p R_{i,p} J(\xi) d\xi. \quad (65)$$

Uma vantagem decorrente desta formulação local com mapeamento CAD está na possibilidade de se inserir em parâmetros de material  $\rho(\xi)$ ,  $E(\xi)$ , área  $A(\xi)$  ou força  $p(\xi, t)$  no espaço paramétrico, o que leva a integrações diretas sem necessidade de acoplamento. Apesar do domínio de integração local estar definido no intervalo

$[0, 1]$  é importante para um melhor desempenho computacional delimitar o suporte da integração, através da propriedade descrita na equação 20, a fim de que operações nulas sejam evitadas.

## 4.2 VIGA DE EULER-BERNOULLI

O elemento de viga de Euler-Bernoulli é aplicado para o caso de vigas finas, pois despreza em sua formulação o efeito do cisalhamento na rotação das faces. As seções planas e perpendiculares ao eixo da viga antes do carregamento permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga depois do carregamento. Além desta simplificação têm-se que o material é elástico, linear e homogêneo e a inércia rotacional da viga é desprezada (TIMOSHENKO, 1937). Neste caso, a rotação  $\theta$  depende diretamente do deslocamento, ou seja:

$$\theta = \frac{dv}{dC}. \quad (66)$$

A figura 21 ilustra o esquema de distribuição de forças e graus de liberdade em um elemento de viga de Euler-Bernoulli. Sob tais hipóteses a equação diferencial que rege o problema é dada por (PETYT, 2010):

$$\frac{\partial^2}{\partial C^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(C, t), \quad (67)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $I$  o momento de inércia da seção,  $A$  a área da seção transversal,  $\rho$  a massa específica do material e  $v$  o deslocamento transversal.

As condições de contorno clássicas do problema representam os diferentes tipos de apoio. Para extremidades engastadas têm-se:

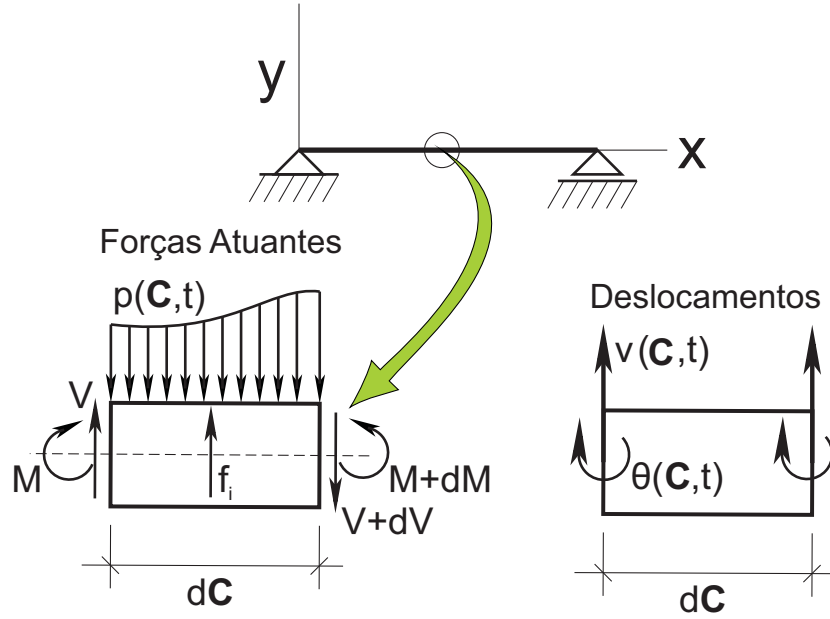


FIGURA 21 – ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

$$v(0, t) = 0 \text{ e/ou } \left. \frac{\partial v}{\partial C} \right|_{\xi=0} = 0, \quad (68)$$

$$v(L, t) = 0 \text{ e/ou } \left. \frac{\partial v}{\partial C} \right|_{\xi=1} = 0, \quad (69)$$

onde  $\xi = 0$  e  $\xi = 1$  representam as extremidades esquerda e direita, respectivamente. Para extremidade simplesmente apoiada as condições de contorno podem ser escritas na forma:

$$v(0, t) = 0 \text{ e/ou } M(0, t) = \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right)_{\xi=0} = 0, \quad (70)$$

$$v(L, t) = 0 \text{ e/ou } M(L, t) = \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right)_{\xi=1} = 0, \quad (71)$$

onde  $M$  é o momento fletor atuante no ponto considerado. Para extremidades livres as condições de contorno podem ser escritas como:

$$M(0, t) = \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right)_{\xi=0} = 0 \text{ e } V(0, t) = \frac{\partial}{\partial C} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right)_{\xi=0} = 0 \quad (72)$$

$$M(L, t) = \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right)_{\xi=1} = 0 \text{ e } V(L, t) = \frac{\partial}{\partial C} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right)_{\xi=1} = 0 \quad (73)$$

onde  $V$  é a força cortante que atua na extremidade considerada. Nos casos práticos



são admitidas diferentes combinações entre as condições de contorno descritas. As condições de contorno envolvendo valores prescritos de  $v$  e de sua derivada primeira são as chamadas condições de contorno essenciais ou de *Dirichlet*, já as condições envolvendo derivadas segundas e terceiras são as condições naturais ou de *Neumann* (BECKER; CAREY; ODEN, 1983).

No desenvolvimento das sentenças numéricas para a viga de Euler-Bernoulli considera-se primeiramente a aplicação do Método dos Resíduos Ponderados na equação 67, com a formulação semi discreta, considerando funções escritas em no espaço  $w(C)$ . A sentença de resíduos ponderados é dada por:

$$\int_C \frac{\partial^2}{\partial C^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right) w dC + \int_C \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dC = \int_C p(C, t) w dC. \quad (74)$$

Integrando o primeiro termo da equação 74 por partes duas vezes, têm-se:

$$\begin{aligned} w \frac{\partial}{\partial C} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right) \Big|_0^L - \frac{\partial w}{\partial C} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right) \Big|_0^L + \int_C \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \right) \frac{\partial w^2}{\partial C^2} dC + \int_C \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dC = \\ \int_C p(C, t) w dC. \end{aligned} \quad (75)$$

Os dois primeiros termos da equação 75, oriundos da integração por partes, são termos de contorno e se anulam na aplicação de quaisquer condições de contorno clássicas, desde que as funções de ponderação satisfaçam as condições de contorno requeridas. Portanto a equação 75 conduz a formas bilineares de massa e rigidez e vetor de forças dadas por:

$$\mathbf{M}(v, w) = \int_C \rho A v w dC \quad (76)$$

$$\mathbf{K}(v, w) = \int_C EI \frac{\partial^2 v}{\partial C^2} \frac{\partial w^2}{\partial C^2} dC \quad (77)$$

$$f(w, C, t) = \int_C p(C, t) w dC. \quad (78)$$

Ao buscar solução numérica através do método de Galerkin utilizando espaços de funções NURBS para a solução  $v$  e para as funções de ponderação, o campo de deslocamentos é escrito como combinação linear na forma:

$$v^h(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p} v_i, \quad (79)$$

onde  $v_i$  são as contribuições nodais para os deslocamentos transversais e  $v^h$  é o campo aproximado de deslocamentos. Obtêm-se as sentenças discretas para as matrizes de massa, rigidez e vetor de forças na forma:

$$M_{i,j} = \int_C \rho A R_{i,p} R_{j,p} dC \quad (80)$$

$$K_{i,j} = \int_C EI \frac{\partial^2 R_{i,p}}{\partial C^2} \frac{\partial R_{j,p}}{\partial C^2} dC \quad (81)$$

$$f_i = \int_C p(C, t) R_{i,p} dC. \quad (82)$$

Para os problemas de vibração livre considera-se a ausência de forças externas atuantes e uma solução geral na forma:

$$v(C, t) = e^{i\omega t} v(C) = ((\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)) v(C), \quad (83)$$

e o problema de vibração se transforma em um problema de autovalores generalizados na forma:

$$\mathbf{K} v^h = \lambda^h \mathbf{M} v^h \quad (84)$$

onde  $\lambda^h = \omega^2$  representa o autovalor aproximado, relacionado a frequência de vibração e  $v^h$  o autovetor aproximado relacionado ao modo de vibração natural.

A forma local para as matrizes características do problema é obtida ao efetuar a transformação de operadores diferenciais nas equações 80, 81 e 82 pelo número de mapeamento da equação 62. As expressões locais são escritas por:

$$M_{i,j} = \int_0^1 \rho A R_{i,p} R_{j,p} J(\xi) d\xi \quad (85)$$

$$K_{i,j} = \int_0^1 EI \frac{\partial^2 R_{i,p}}{\partial \xi^2} \frac{\partial R_{j,p}^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{J(\xi)^3} d\xi \quad (86)$$

$$f_i = \int_0^1 p R_{i,p} J(\xi) d\xi. \quad (87)$$

As funções do tipo NURBS são incapazes de impor graus de liberdade de rotação para os nós de um elemento de viga (COTTRELL et al., 2006). A aproximação do elemento de viga de Euler-Bernoulli via AIG é realizada com rotação livre, sendo que apenas os deslocamentos transversais são graus de liberdade. Formulações do MEF para elementos de flexão com rotação livre foram desenvolvidos por Phaal e Calladine (1992a) para viga de Euler-Bernoulli e placa fina, e Phaal e Calladine (1992b) e Oñate e Zárate (2000) desenvolveram a extensão para cascas finas. Uma abordagem variacional utilizando o elemento de viga com rotação livre para o método Galerkin descontínuo é feita por Engel et al. (2002). Zhou e Sze (2013) utilizaram o elemento de viga com rotação livre na aplicação para análise de cabos, abordando a possibilidade de descrever grandes deslocamentos sem perda substancial na qualidade da solução. A principal desvantagem da formulação com rotação livre é a imposição de engaste. Cottrell et al. (2006) sugerem a aplicação de métodos de penalização da forma fraca da equação diferencial para a aplicação das condições de contorno de rotação. Uma aproximação da condição de engaste é feita por (RAUEN, 2014) através da restrição de dois deslocamentos consecutivos, obtendo bons resultados.

### 4.3 DECOMPOSIÇÃO GLOBAL PARA OS PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

Em alguns problemas é necessário efetuar transformação de coordenadas locais para coordenadas globais, geralmente visando a imposição específica de condições de contorno ou acoplamento entre elementos. Este procedimento se dá através da decomposição trigonométrica, exemplificada pela figura 22, onde pelas derivadas das curvas NURBS se dá de maneira direta. Para um  $i_{esimo}$  grau de liberdade que se deseja transformar em coordenadas globais tem-se:

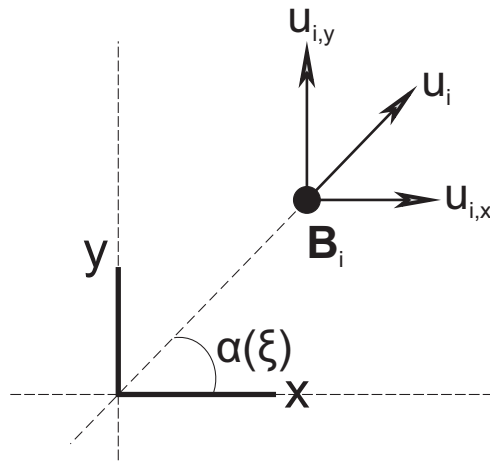


FIGURA 22 – TRANSFORMAÇÃO PARA COORDENADAS GLOBAIS DE UM GRAU DE LIBERDADE

$$u_i = \cos(\alpha) u_{x,i} + \sin(\alpha) u_{y,i} = \frac{\partial X}{\partial C} u_{x,i} + \frac{\partial Y}{\partial C} u_{y,i}, \quad (88)$$

$$v_i = -\sin(\alpha) v_{x,i} + \cos(\alpha) v_{y,i} = -\frac{\partial Y}{\partial C} v_{x,i} + \frac{\partial X}{\partial C} v_{y,i}, \quad (89)$$

onde  $u_i$  e  $v_i$  são, respectivamente, graus de liberdade axiais e transversais, sendo  $u_{x,i}$ ,  $u_{y,i}$ ,  $v_{x,i}$ ,  $v_{y,i}$  suas formas globais, e  $\alpha$  é o ângulo tangente a curva em um dado ponto o qual depende das derivadas primeiras, podendo ser localmente escrito como:

$$\alpha = \arctan \left( \frac{dY/d\xi}{dX/d\xi} \right). \quad (90)$$

Para os novos graus de liberdade globais as matrizes de rigidez, massa e vetor de forças são reescritas na forma:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}, \quad (91)$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}, \quad (92)$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}, \quad (93)$$

onde  $\hat{\mathbf{K}}$ ,  $\hat{\mathbf{M}}$  e  $\hat{\mathbf{f}}$  são as matrizes de massa, rigidez e vetor de forças com graus de liberdade globais e  $\mathbf{T}$  é uma transformação linear carregando os termos de decomposição trigonométrica para os graus de liberdade selecionados. Para a construção da transformação  $\mathbf{T}$ , seja  $\mathbf{r}$  um conjunto de números inteiros que representam os índices  $i$  de todos os graus de liberdade para serem transformados em coordenadas globais. A matriz  $\mathbf{T}$  é uma matriz de nulidade dominante, possuindo dimensão  $(n + \bar{r}) \times (n)$  onde  $\bar{r} = \text{card}(\mathbf{r})$ . Os valores não nulos de  $\mathbf{T}$  são dados por:

$$T_{i,i} = \frac{\partial X}{\partial C}(\xi) \text{ e } T_{i+1,i} = \frac{\partial Y}{\partial C}(\xi) \text{ para } i \text{ em } \mathbf{r}, \quad (94)$$

para deslocamentos axiais,

$$T_{i,i} = -\frac{\partial Y}{\partial C}(\xi) \text{ e } T_{i+1,i} = \frac{\partial X}{\partial C}(\xi) \text{ para } i \text{ em } \mathbf{r}, \quad (95)$$

for para deslocamentos transversais, e

$$T_{i,i} = 1, \quad (96)$$

para graus de liberdade de rotação e para todos os graus de liberdade que não foram

selecionados para a decomposição global.

#### 4.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES

A teoria do estado plano de tensões (BATHE, 1996; REDDY, 1993) provém de uma simplificação da elasticidade 3D para o estado bidimensional onde as dimensões do domínio plano são muito maiores do que a sua espessura  $h$ . Para excitações externas atuando apenas no plano  $X, Y$ , a teoria dos estados planos de tensão leva em conta que:

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0. \quad (97)$$

A relação que rege o movimento de um elemento em estado plano de tensões é governada por um sistema de equações diferenciais, definidas por:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_x(C, t) \quad (98)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p_y(C, t) \quad (99)$$

onde  $\sigma_x, \sigma_y$  são as tensões normais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $\tau_{xy}$  é a tensão cisalhante no plano,  $\rho$  a massa específica do material e  $u$  e  $v$  são os deslocamentos horizontal e vertical, respectivamente.

Para materiais elásticos lineares, homogêneos e isotrópicos, a relação entre tensões e deformações é dada por (BATHE, 1996):

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon \quad (100)$$

onde a matriz  $\mathbf{D}$  é designada por matriz de relações constitutivas do estado plano de tensões,  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $\nu$ , o coeficiente de Poisson do material. As relações tensão-deformação podem ser escritas na forma aberta dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (101)$$

onde as componentes de deformações são escritas em função dos deslocamentos  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ :

$$\epsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \quad (102)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}; \quad (103)$$

$$2\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}. \quad (104)$$

Com o termo de relações constitutivas e as deformações dadas nas equações 102, 103 e 104, o sistema de equações diferenciais governante do problema de estado plano de tensões é reescrito na forma (REDDY, 1993):

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(1-\nu)E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = p_x(C, t), \quad (105)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(1-\nu)E}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] + \rho \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = p_y(C, t). \quad (106)$$

A forma fraca das equações 105 e 106 é obtida pela multiplicação das funções de ponderação  $w(\mathbf{S})$ , definidas no espaço de uma superfície plana  $\mathbf{S}$ . Através da formulação semi-discreta e integração por partes a forma variacional do problema é dada por:

$$h \int_{\mathbf{S}} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \left( d_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + d_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} d_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho u w \ddot{u} \right] \mathbf{S} = \int_{\mathbf{S}} p_x(C, t) w d\mathbf{S}, \quad (107)$$

$$h \int_{\mathbf{S}} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} d_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left( d_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + d_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho v w \ddot{v} \right] dxdy = \int_{\mathbf{S}} p_y(C, t) w d\mathbf{S}, \quad (108)$$

onde  $d_{11}$ ,  $d_{12}$  e  $d_{33}$  são elementos da matriz  $\mathbf{D}$ , definidos por:

$$d_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (109)$$

$$d_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad (110)$$

$$d_{33} = \frac{(1 - \nu)E}{2(1 - \nu^2)}. \quad (111)$$

A sentença numérica através do método de Galerkin se dá ao efetuar equivalência dos espaços de aproximação para os deslocamentos  $u$ ,  $v$ , e para a função de ponderação do resíduo  $w$ . Na AIG os campos são escritos como uma combinação linear entre as funções NURBS e os parâmetros interpolatórios:

$$u^h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) u_{i,j}, \quad (112)$$

$$v^h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) v_{i,j}. \quad (113)$$

Ao substituir as equações 112 e 113 nas expressões 107 e 108 a sentença pode ser expressa na forma da equação do equilíbrio dinâmico:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^h + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^h = \mathbf{f}, \quad (114)$$

onde

$$\mathbf{u}^{hT} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & \dots & u_n & v_n \end{bmatrix} \quad (115)$$



e as matrizes de rigidez e massa podem ser escritas na forma matricial dada por (REDDY, 1993; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000):

$$\mathbf{K} = \int_{\mathbf{S}} h \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\mathbf{S} \quad (116)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\mathbf{S}} \rho h \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\mathbf{S} \quad (117)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\mathbf{S}} \mathbf{H}^T \mathbf{p} d\mathbf{S} \quad (118)$$

onde a matriz  $\mathbf{H}$  contém as funções de forma NURBS e a matriz  $\mathbf{B}$  as suas derivadas primeiras. As matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  são definidas como:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} R_{1,1}^{p,q} & 0 & R_{2,1}^{p,q} & 0 & \dots & R_{n,m}^{p,q} & 0 \\ 0 & R_{1,1}^{p,q} & 0 & R_{2,1}^{p,q} & \dots & 0 & R_{n,m}^{p,q} \end{bmatrix} \quad (119)$$

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{T}} \mathbf{H} \quad (120)$$

onde a matriz  $\bar{\mathbf{T}}$  é uma matriz de operadores derivada dada por:

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (121)$$

O vetor de forças  $\mathbf{p}$  é escrito na forma:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x(\mathbf{S}, t) \\ p_y(\mathbf{S}, t) \end{bmatrix}. \quad (122)$$

A formulação para o problema de vibração livre está em impor solução geral para os campos de deslocamento, na forma:

$$u(x, y, t) = e^{i\omega t} u(x, y) = (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) u(x, y) \quad (123)$$

$$v(x, y, t) = e^{i\omega t} v(x, y) = (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) v(x, y) \quad (124)$$

o problema dinâmico do estado plano de tensões se transforma em um problema de autovalores, dado por:

$$h \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial w_1}{\partial x} \left( c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial y} c_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy - \rho \lambda \int_{\Omega} w_1 u \, dx \, dy = 0, \quad (125)$$

$$h \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial w_2}{\partial x} c_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_2}{\partial y} \left( c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy - \rho \lambda \int_{\Omega} w_2 v \, dx \, dy = 0. \quad (126)$$

Ao aplicar o método de Galerkin e impor o campo de deslocamentos aproximados na forma das equações 112 e 113 nas equações 125 e 126, o problema de vibração pode ser expresso na forma clássica dada por:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^h = \lambda^h \mathbf{M} \mathbf{u}^h \quad (127)$$

onde é o autovetor  $\mathbf{u}^h$  escrito sob o mesmo formato da equação 115 e  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  escritas nas formas das expressões 116 e 117, respectivamente.

A forma local para as matrizes de massa, e de rigidez e o vetor de força pode ser escrita através da substituição pelos parâmetros de mapeamento CAD:

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \int_0^1 h \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \det(\mathbf{J}) \, d\xi \, d\eta, \quad (128)$$

$$\mathbf{M} = \int_0^1 \int_0^1 \rho h \mathbf{H}^T \mathbf{H} \det(\mathbf{J}) \, d\xi \, d\eta, \quad (129)$$

$$\mathbf{f} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{H}^T \mathbf{p} \det(\mathbf{J}) \, d\xi \, d\eta, \quad (130)$$

onde  $J$  é a matriz Jacobiana com os termos de mapeamento CAD, dada pela equação 40 e  $\bar{B}$  é a matriz com as derivadas locais escritas na forma:

$$\bar{B} = J^{-1}(\bar{T})H, \quad (131)$$

com

$$J^{-1}(\bar{T}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (132)$$

o qual denota o operador para o uso das derivadas locais.

#### 4.5 EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL

A equação da onda bidimensional descreve o comportamento de vários sistemas oscilatórios como a propagação de ondas de pressão e deslocamentos em membranas (BELTRAN; MONTERDE, 2004). Para efeitos de simplificação matemática assume-se que a membrana é perfeitamente flexível e infinitamente fina com material e espessura homogêneos. Assume-se ainda que a membrana é uniformemente esticada em todas as direções por uma tensão tão grande que pequenas flutuações nesta tensão, devido a pequenos deslocamentos, podem ser desprezados (TIMOSHENKO, 1937). A equação diferencial que rege o problema é dada por (DUFFY, 2010; BELTRAN; MONTERDE, 2004):

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(x, y, t), \quad (133)$$

onde  $u$  representa o deslocamento transversal,  $c$  a velocidade de propagação da onda e  $f(x, y, t)$  é um termo de excitação externa, que neste caso é matematicamente semelhante ao termo de força.

A sentença variacional para a equação da onda bidimensional se dá de maneira semelhante aos métodos anteriormente descritos, onde uma função de ponderação  $w(x, y)$  é aplicada na equação 133 e uma minimização do resíduo é imposta na forma:

$$\int_S (\nabla^2 u) w dS = \int_S \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) w dS - \int_S f(x, y, t) w dS \quad (134)$$

onde  $S$  é a superfície que representa o domínio do problema. Ao aplicar integração por partes no primeiro termo da expressão 134 a forma fraca do problema é obtida, na forma (DUFFY, 2010):

$$\int_S \nabla u \cdot \nabla w dS + \int_S \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) w dS = \int_{\Gamma} w (\nabla u \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \int_S f(x, y, t) w dS \quad (135)$$

onde  $\Gamma$  representa o contorno da superfície e  $\mathbf{n}$  um vetor normal ao contorno. Para quaisquer aplicações das condições de contorno essenciais ou naturais, o termo de contorno se anula. Ao aplicar o método de Galerkin para a construção da sentença numérica, os espaços do deslocamento  $u$  e da ponderação do erro  $w$  são aproximados pelas funções NURBS através de uma combinação linear na forma da equação 112. O problema da equação da onda bidimensional pode ser escrito na forma da equação do equilíbrio dinâmico:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^h + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^h = \mathbf{f}, \quad (136)$$

com as matrizes de rigidez, massa e vetor de forças dadas por:

$$\mathbf{K} = \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{B} dS, \quad (137)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c^2} \int_S \mathbf{H}^T \mathbf{H} dS, \quad (138)$$

$$\mathbf{f} = \int_S \mathbf{H}^T f(x, y, t) d\mathbf{S}, \quad (139)$$

onde  $\mathbf{H}$  é um vetor contendo as funções NURBS e  $\mathbf{B}$  suas derivadas primeiras, na forma:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} R_{1,1}^{p,q} & R_{2,1}^{p,q} & \dots & R_{n,m}^{p,q} \end{bmatrix} \quad (140)$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}^{p,q}}{\partial x} & \frac{\partial R_{1,1}^{p,q}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{2,1}^{p,q}}{\partial x} & \frac{\partial R_{2,1}^{p,q}}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial R_{n,m}^{p,q}}{\partial x} & \frac{\partial R_{n,m}^{p,q}}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (141)$$

A forma paramétrica para a integração dos termos de rigidez, massa e força se dá ao aplicar os termos de mapeamento nas equações 137, 138 e 139, sendo então reescritos na forma:

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \int_0^1 J^{-1}(\mathbf{B})^T J^{-1}(\mathbf{B}) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (142)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c^2} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{H}^T \mathbf{H} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta, \quad (143)$$

$$\mathbf{f} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{H}^T f(x, y, t) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta, \quad (144)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana derivada do mapeamento CAD, dada pela equação 40.

O operador para derivadas locais é dado por:

$$J^{-1}(\mathbf{B})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}^{p,q}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial R_{1,1}^{p,q}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial R_{1,1}^{p,q}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial R_{1,1}^{p,q}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{2,1}^{p,q}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial R_{2,1}^{p,q}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial R_{2,1}^{p,q}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial R_{2,1}^{p,q}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial R_{n,m}^{p,q}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial R_{n,m}^{p,q}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial R_{n,m}^{p,q}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial R_{n,m}^{p,q}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (145)$$

Para captar os modos e frequências naturais de vibração do elemento de membrana considera-se a ausência de excitações externas e uma solução geral é

imposta para o campo de deslocamentos na forma:

$$u(x, y, t) = e^{i\omega t} u(x, y) = (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) u(x, y), \quad (146)$$

e o problema dinâmico para o caso estacionário recai no problema de autovalores na forma da equação 127, onde  $u^h$  são os modos de vibração relacionado com os autovetores do problema e  $\lambda$  o autovalor, relacionado com as frequências naturais de vibração.

## 5 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA COM ENRIQUECIMENTO

Neste capítulo são abordados os principais aspectos de implementação e teóricos da Análise Isogeométrica com enriquecimento (PUAIG). As formulações teóricas, aspectos de implementação e os métodos adaptativos apresentados nesse capítulo consistem nas principais contribuições teóricas deste trabalho.

A Análise Isogeométrica enriquecida, neste trabalho referenciada como PUAIG, consiste em efetuar estratégias de enriquecimento de forma a utilizar o conceito de mapeamento global, proveniente do CAD. Neste contexto as funções de enriquecimento são aplicadas no espaço paramétrico e mapeadas para o espaço físico através do mesmo procedimento de mapeamento da AIG pura.

O processo de enriquecimento aqui proposto para a AIG está inspirado no MEFG. Entende-se que este método utiliza uma estratégia de enriquecimento local, onde o MEF puro e os níveis de enriquecimento são definidos no espaço paramétrico e mapeados localmente para o espaço físico. A figura 23 mostra o esquema básico de mapeamento do MEFG, que toma uma característica análoga ao MEF.

A PUAIG, por sua vez, consiste em estender o espaço da AIG pura inserindo os níveis de enriquecimento no espaço paramétrico, sendo estes, portanto, definidos de forma global e mapeados para o espaço físico através do mesmo procedimento de mapeamento CAD. A figura 24 ilustra o esquema de mapeamento da PUAIG, com a estratégia de implementação similar da AIG pura.

Desta maneira a solução aproximada através da PUAIG é escrita na forma:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{u}_{AIG} + \mathbf{u}_{Enriquecido}, \quad (147)$$

onde  $\mathbf{u}_{AIG}$  é o campo aproximado pela AIG pura definido através das equações 34 e 35, e  $\mathbf{u}_{Enriquecido}$  é a parcela enriquecida, delineada através da equação 15. Nesta

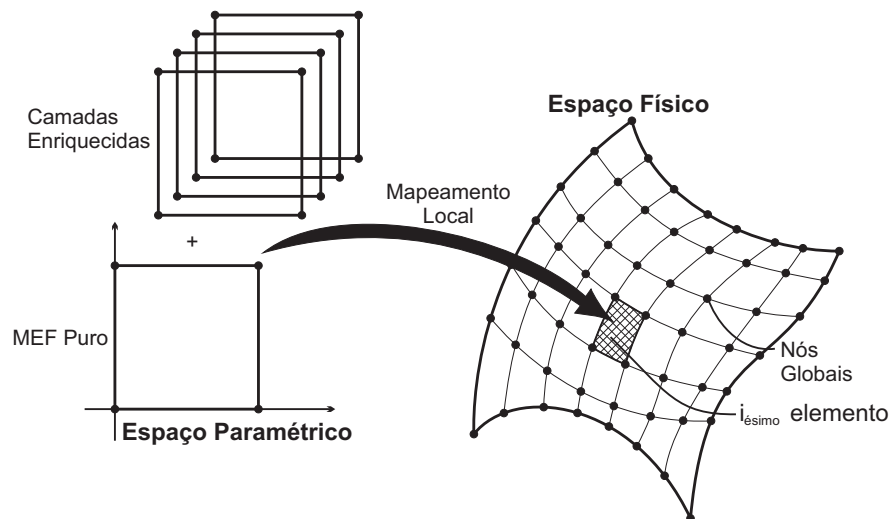


FIGURA 23 – ESTRATÉGIA DE IMPLEMENTAÇÃO DO MEFG

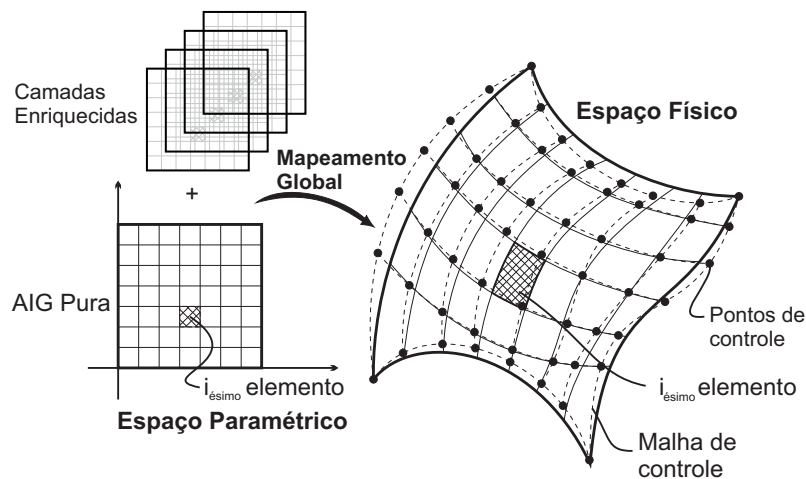


FIGURA 24 – ESTRATÉGIA DE IMPLEMENTAÇÃO DA PUAIG

formulação ressalta-se que outras funções de partição da unidade podem ser utilizadas na parcela enriquecida, dando a PUAIG uma característica de método híbrido que mistura a AIG com outras estratégias e enriquecimento e o mapeamento CAD.

A parcela enriquecida na equação 147 possui unicamente a função de estender o espaço de interpolação da solução aproximada. As funções de enriquecimento dos modelos apresentados são escolhidas de tal forma a se anular nas fronteiras, fazendo com que as condições de contorno da PUAIG sejam impostas apenas na parcela de AIG pura.



## 5.1 FORMULAÇÃO PARA OS PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

Sob o ponto de vista de implementação as mesmas estratégias de mapeamento da AIG são utilizadas na PUAIG para a integração das matrizes de massa, rigidez e vetor de forças. As formulações variacionais dos problemas dinâmicos são mantidas, variando-se apenas o espaço de funções utilizado para a obtenção das matrizes do problema. Portanto, para os problemas unidimensionais, um vetor de funções estendido  $\mathbf{H}$  pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} R_1^p & R_2^p & \dots & R_n^p & \eta_1 s_1 & \eta_1 s_2 & \dots & \eta_a s_b \end{bmatrix}, \quad (148)$$

onde  $R_1^p, \dots, R_n^p$  são funções NURBS de grau  $p$ ,  $\eta_1, \dots, \eta_a$  são funções partição da unidade e  $s_1, \dots, s_b$  são funções de enriquecimento. Logo as matrizes de massa, rigidez e o vetor de forças dos problemas unidimensionais podem ser reescritos. Para o problema de barras, primeiramente:

$$\mathbf{M} = \int_C \rho A \mathbf{H}^T \mathbf{H} dC, \quad (149)$$

$$\mathbf{K} = \int_C E A \mathbf{B}^T \mathbf{B} dC, \quad (150)$$

$$\mathbf{f} = \int_C \mathbf{H}^T p(C, t) dC, \quad (151)$$

onde  $\mathbf{B}$  é o vetor de derivadas primeiras, dado por:

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^p}{\partial C} & \frac{\partial R_2^p}{\partial C} & \dots & \frac{\partial R_n^p}{\partial C} & \frac{\partial(\eta_1 s_1)}{\partial C} & \frac{\partial(\eta_1 s_2)}{\partial C} & \dots & \frac{\partial(\eta_a s_b)}{\partial C} \end{bmatrix}. \quad (152)$$

Para o problema da viga de Euler-Bernoulli as matrizes de massa, rigidez e vetor de forças para a formulação enriquecida podem ser reescritos na forma matricial:

$$\mathbf{M} = \int_C \rho A \mathbf{H}^T \mathbf{H} dC \quad (153)$$

$$\mathbf{K} = \int_C EI \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{B}} dC \quad (154)$$

$$\mathbf{f} = \int_C \mathbf{H}^T p(C, t) dC, \quad (155)$$

onde  $\bar{\mathbf{B}}$  é a matriz de derivadas segundas das funções da PUAIG, definida como:

$$\bar{\mathbf{B}}^T = \left[ \frac{\partial^2 R_1^p}{\partial C^2} \quad \frac{\partial^2 R_2^p}{\partial C^2} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 R_n^p}{\partial C^2} \quad \frac{\partial^2 (\eta_1 s_1)}{\partial C^2} \quad \frac{\partial^2 (\eta_1 s_2)}{\partial C^2} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 (\eta_a s_b)}{\partial C^2} \right]. \quad (156)$$

## 5.2 FORMULAÇÃO PARA OS PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

Nos casos bidimensionais as formulações dos problemas dinâmicos são mantidas no mesmo formato das formas apresentadas para AIG pura. Para o estado plano de tensões as matrizes de rigidez e de massa e vetor de forças tomam as formas das equações 116, 117 e 118, respectivamente, sendo o vetor de funções  $\mathbf{H}$  expresso na forma estendida:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} R_{1,1}^{p,q} & 0 & \dots & R_{n,m}^{p,q} & 0 & \eta_1 s_1 & 0 & \dots & \eta_a s_b & 0 \\ 0 & R_{1,1}^{p,q} & \dots & 0 & R_{n,m}^{p,q} & 0 & \eta_1 s_1 & \dots & 0 & \eta_a s_b \end{bmatrix}. \quad (157)$$

A matriz estendida  $\mathbf{B}$  de derivadas para o estado plano é determinada ao se aplicar a equação 120 com a mesma matriz de operadores da equação 121.

A formulação enriquecida para o problema da equação da onda bidimensional se mantém na forma das equações 137, 138 e 139 para as matrizes de rigidez, massa e o vetor de forças, respectivamente. As matrizes de funções e derivadas primeiras para a versão estendida são dadas pelas expressões:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} R_{1,1}^{p,q} & R_{2,1}^{p,q} & \dots & R_{n,m}^{p,q} & \eta_1 s_1 & \eta_1 s_2 & \dots & \eta_a s_b \end{bmatrix} \quad (158)$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}^{p,q}}{\partial x} & \frac{\partial R_{1,1}^{p,q}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{2,1}^{p,q}}{\partial x} & \frac{\partial R_{2,1}^{p,q}}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial R_{n,m}^{p,q}}{\partial x} & \frac{\partial R_{n,m}^{p,q}}{\partial y} \\ \frac{\partial(\eta_1 s_1)}{\partial x} & \frac{\partial(\eta_1 s_1)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\eta_1 s_2)}{\partial x} & \frac{\partial(\eta_1 s_2)}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial(\eta_a s_b)}{\partial x} & \frac{\partial(\eta_a s_b)}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (159)$$

Tanto nos problemas bidimensionais como nos problemas unidimensionais os procedimentos de mapeamento para a forma local na PUAIG são idênticos aos da AIG pura.

### 5.3 ESTRATÉGIAS DE ENRIQUECIMENTO

Com o objetivo de testar os diferentes meios de enriquecimento na PUAIG, dividem-se as formas de enriquecimento em local e global. O enriquecimento global consiste em se definir funções de enriquecimento e partição da unidade na parcela enriquecida de modo que um conjunto de funções cubra todo o domínio, independente da divisão ou do esquema de discretização. Ao se realizar um refinamento de malha, aumentando o número de *knots* as funções de enriquecimento na estratégia global não são modificadas. Esta estratégia de enriquecimento é exclusiva de PUAIG, por utilizar o espaço paramétrico nos para o enriquecimento.

Já a estratégia local se assemelha ao contexto de enriquecimento do MEFG, e consiste em definir funções de enriquecimento entre dois *knots*. Neste caso, ao se realizar um refinamento de malha com o aumento de *knots*, novas funções de enrique-

cimento são inseridas. Como a parcela enriquecida na estratégia global mantém-se inalterada em um refinamento, o enriquecimento global da PUAIG confere um menor número de graus de liberdade se comparado com a estratégia local. As figuras 25 e 26 mostram, o caso de discretização para a estratégia global e local, respectivamente. Neste exemplo a partição da unidade na parcela enriquecida é formada de funções NURBS com mesmo grau das funções da AIG pura. Em ambas as figuras é utilizado como exemplo uma base B-Splines com grau  $p = 2$  e um vetor de *knots*  $\Xi = \{0, 0, 0, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 1, 1, 1\}$ .

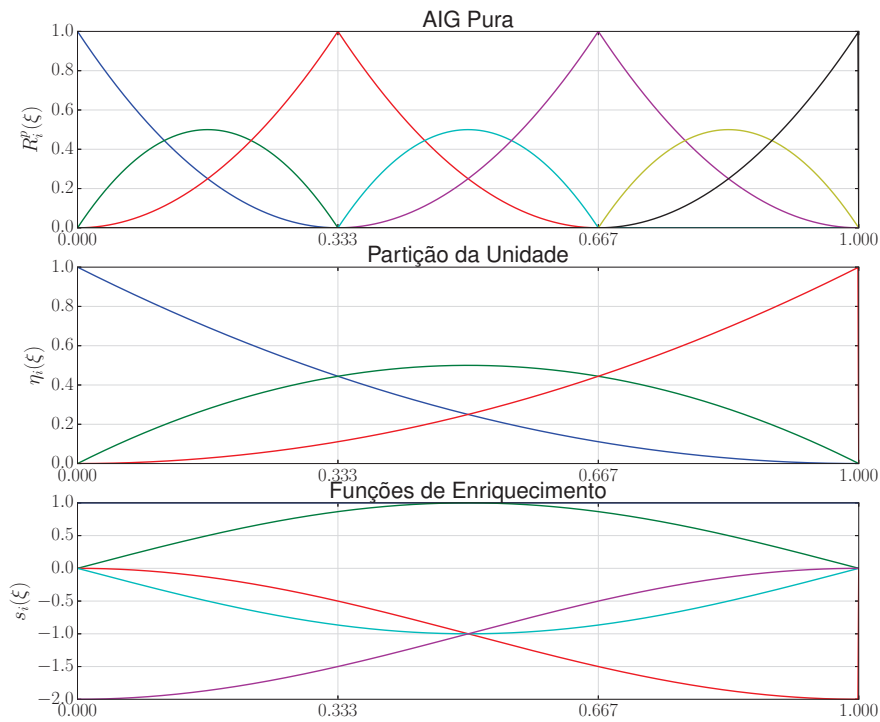


FIGURA 25 – EXEMPLO DE ESTRATÉGIA DE ENRIQUECIMENTO GLOBAL PARA UMA MALHA UNIDIMENSIONAL

Neste trabalho a PUAIG é testada com a utilização de outras partições da unidade na parcela enriquecida, além das B-Splines. A presente formulação da PUAIG consiste na utilização de B-Splines ou NURBS na parte relativa a AIG Pura, e na parcela enriquecida uma multiplicação das funções de enriquecimento por uma PU polinomial, gerando uma espécie de método híbrido com relação às PUs (RAUEN; MACHADO; ARNDT, 2020). Três famílias de funções PU são consideradas neste tra-

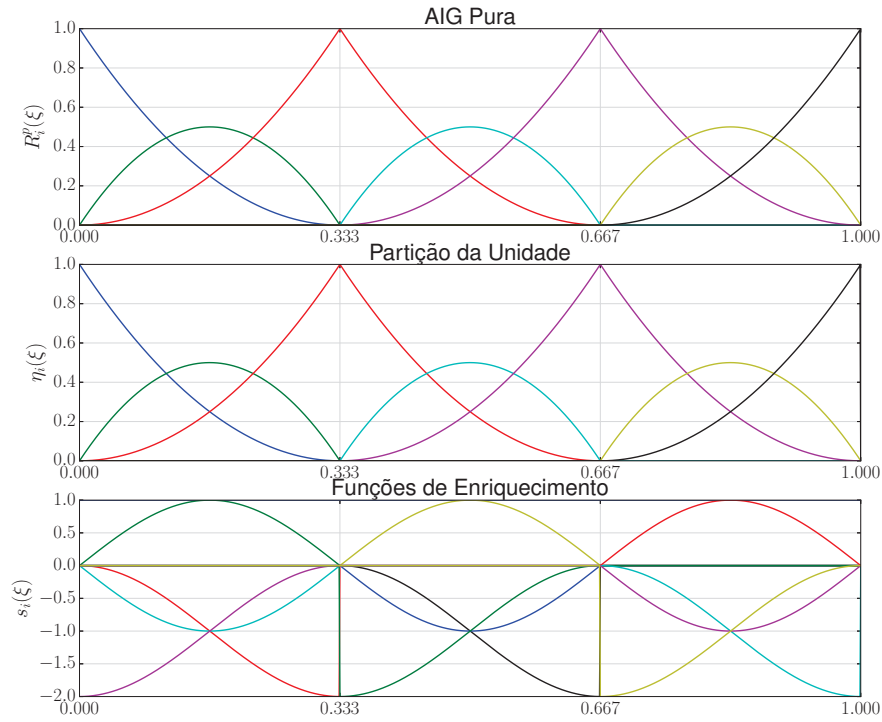


FIGURA 26 – EXEMPLO DE ESTRATÉGIA DE ENRIQUECIMENTO LOCAL PARA UMA MALHA UNIDIMENSIONAL

balho: a PU NURBS ou B-Splines, as funções lineares utilizadas no MEF e em alguns problemas do MEEG, e funções polinomiais de grau 4 (MENDONÇA; BARCELLOS; DUARTE, 2000).

Para a construção das funções PU no espaço paramétrico na forma local, define-se como  $\Xi$  o vetor de *knots* sem repetição, apenas ordenados em ordem ascendente, na forma:

$$\Xi_i = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_{el}+1}\} \text{ com } \xi_{i+1} > \xi_i, \quad (160)$$

onde  $n_{el}$  é o número de elementos locais. Para as construções das PUs que não são B-Splines, é necessário definir um vetor com os *knots* não repetidos. As funções PU nas fronteiras do elemento precisam de um ponto fora do domínio para serem construídas coerentemente com esta formulação. Logo define-se o vetor  $\tilde{\Xi}$ , que carrega a sequência de *knots* sem repetição com um ponto, fora do domínio em cada extremi-

dade. Este vetor pode ser escrito na forma:

$$\tilde{\Xi}_i = \{-\xi_2, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_{el}+1}, 2 - \xi_{n_{el}}\} \text{ com } \xi_{i+1} > \xi_i. \quad (161)$$

A PU Linear é definida no espaço paramétrico na forma local como na Equação 169; por outro lado, a PU Polinomial é definida como na Equação 170, a seguir apresentadas.

$$\eta_i(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi - \xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} & \text{para } \xi \in [\xi_{j-1}, \xi_j] \\ \frac{\xi_{j+1} - \xi}{\xi_{j+1} - \xi_j} & \text{para } \xi \in [\xi_j, \xi_{j+1}] \end{cases} \quad (162)$$

$$\eta_i(\xi) = \left[1 + \frac{\xi - \xi_j}{\xi_j - \xi_{j-1}}\right]^4 \left[1 - \frac{\xi - \xi_j}{\xi_{j+1} - \xi_j}\right]^4 \quad (163)$$

com  $j = 2, 3, \dots, n_{el} + 1$ ,  $(\xi_{j-1}, \xi_j, \xi_{j+1}) \in \tilde{\Xi}_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_{el} - 1$  e  $\xi \in [0, 1]$ .

As funções de enriquecimento utilizadas nos experimentos deste trabalho expressam soluções analíticas gerais para o campo de deslocamentos ou modos admissíveis de vibração para os problemas estacionários. Um conjunto flexível e eficiente de funções de enriquecimento foi inicialmente proposto por Arndt (2009) e Arndt, Machado e Scremin (2010) para o MEFG em problemas de vibração livre. Além de expressarem muito bem os modos de vibrar (ARNDT; MACHADO; SCREMIN, 2010; TORII, 2012), estas funções trigonométricas apresentaram bons resultados em fenômenos de vibração forçada (WEINHARDT, 2016; FREISLEBEN, 2019). As funções 'Arndts' foram inicialmente propostas para o MEFG na forma:

$$\gamma_{1j} = \sin(\beta_j L_e \xi) \quad (164)$$

$$\gamma_{2j} = \sin(\beta_j L_e (\xi - 1)) \quad (165)$$

$$\phi_{1j} = \cos(\beta_j L_e \xi) - 1 \quad (166)$$

$$\phi_{2j} = \cos(\beta_j L_e (\xi - 1)) - 1, \quad (167)$$

onde  $L_e$  é o comprimento do elemento finito, sendo as funções de enriquecimento para o MEFG são definidas no domínio do elemento paramétrico. Na formulação do MEFG as funções  $\gamma_{1j}$  e  $\phi_{1j}$  são multiplicadas pela primeira função PU, e as funções  $\gamma_{2j}$  e  $\phi_{2j}$  são multiplicadas pela segunda função PU. O parâmetro  $\beta_j$ , dado por:

$$\beta_j = \omega_j, \quad (168)$$

depende de uma frequência de referência para o enriquecimento. O índice  $j$  indica neste caso o nível de enriquecimento. É possível inserir tantos níveis quanto se queira com variados valores de  $\omega_j$  que expressem modos diferentes de vibrar. Ressalta-se que as expressões algébricas das equações 164-167 desenvolvidas por Arndt (2009) dependem do tipo de elemento e domínio utilizado. Ligeiras adaptações destas expressões foram feitas por Torii (2012) e Weinhardt et al. (2018) a fim de adequar as funções de enriquecimento às respectivas formulações. Contudo a forma destas funções de enriquecimento manteve-se inalterada.

Na PUAIG as funções Arndts são adaptadas para o espaço paramétrico. Para escrever tais funções em cada elemento, seja o vetor de *knots* distintos  $\bar{\Xi}$ , definido como:

$$\bar{\Xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_{el}+1}\}, \quad (169)$$

com  $\xi_{i+1} > \xi_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n_{el} + 1$ , onde  $n_{el}$  denota o número de elementos na discretização. As funções Arndt são definidas para a PUAIG como:

$$\gamma_{1,i,j} = \sin \left( \beta_j \frac{\xi - \bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i} \right) \quad (170)$$

$$\gamma_{2,i,j} = \sin \left( \beta_j \left( \frac{\xi - \bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i} - 1 \right) \right) \quad (171)$$

$$\phi_{1,i,j} = \cos \left( \beta_j \frac{\xi - \bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i} \right) - 1 \quad (172)$$

$$\phi_{2,i,j} = \cos \left( \beta_j \left( \frac{\xi - \bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i} - 1 \right) \right) - 1 \quad (173)$$

onde  $i$  são os índices em  $\bar{\Xi}$  e  $j$  os níveis de enriquecimento. As funções de enrique-

cimento ilustradas nas figuras 25 e 26 são funções Arndt sob a forma global e local, respectivamente. A lógica de multiplicação pelas funções PU neste caso é a mesma do MEFG.

Para os casos bidimensionais no estado plano de tensões e equação da onda bidimensional são consideradas as funções de enriquecimento Arndts aplicadas nas duas direções. São definidas as mesmas funções dadas pelas equações 170 - 173 em  $\xi$  e  $\eta$ . As funções bidimensionais de enriquecimento são dadas através do produto das funções em cada direção. Têm-se, portanto, um conjunto de 16 funções, resultado do produto de 4 funções em cada direção. Para a primeira função, por exemplo, têm-se a seguinte expressão:

$$\psi_{1,1,i,j}(\xi, \eta) = \gamma_{1,i,j}(\xi)\gamma_{1,i,j}(\eta). \quad (174)$$

As funções enriquecedoras para um elemento são mostradas através da figura 27.

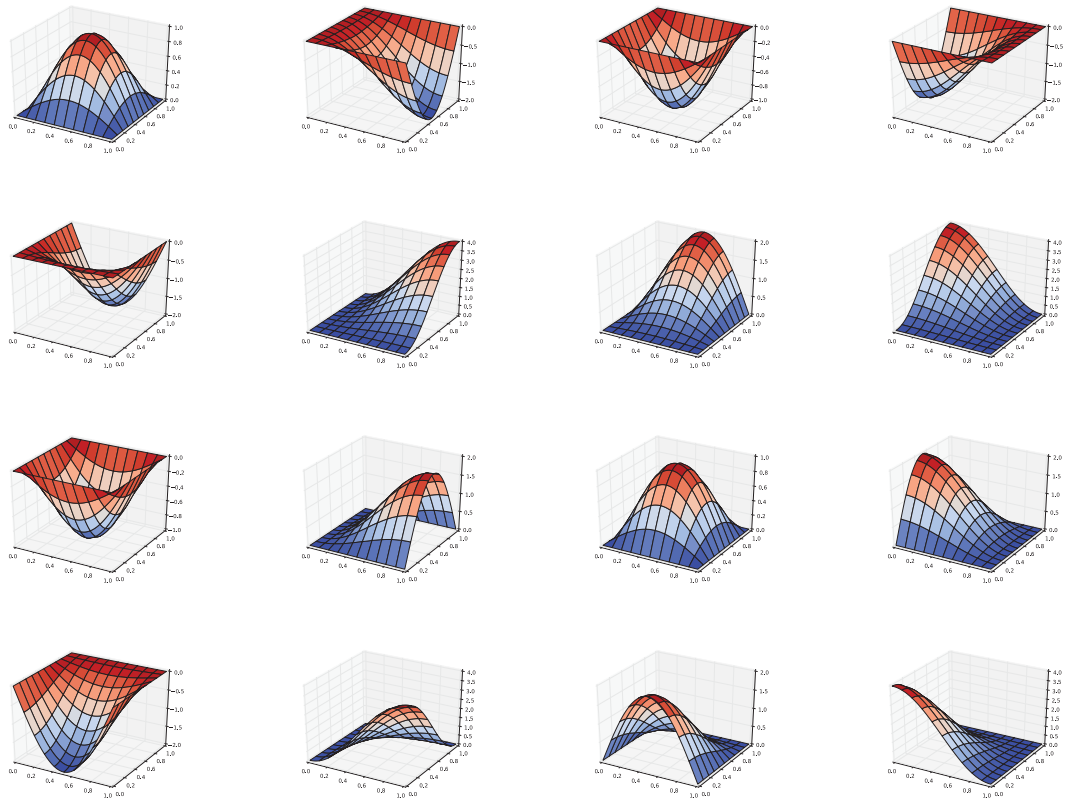


FIGURA 27 – FUNÇÕES ENRIQUECEDORAS ARNDTS BIDIMENSIONAIS



## 5.4 PROCEDIMENTOS ADAPTATIVOS

Neste trabalho as versões adaptativas da PUAIG também são desenvolvidas e testadas. Este procedimento é levado em conta devido aos excelentes resultados em termos de precisão e taxas de convergência para problemas de vibração livre. Ainda como contribuição inédita, este trabalho apresenta uma versão adaptativa para problemas de vibração forçada.

O procedimento de adaptação para o MEFG foi inicialmente desenvolvido por Arndt (2009) e Arndt, Machado e Scremin (2010) para problemas de vibração livre de estruturas reticuladas. Consiste em inicialmente escolher uma frequência de vibração livre que deve ser melhor aproximada, chamada de frequência alvo, e extrair o seu valor inicial proveniente de uma aproximação via MEF. O valor obtido desta aproximação é utilizado no enriquecimento através do MEFG. Este processo é repetido quantas vezes for necessário até obter uma acurácia aceitável (ARNDT, 2009). Mais recentemente o MEFG adaptativo foi aplicado ao problema de vibração livre para vigas de Euler-Bernoulli, obtendo altas taxas de convergência para a frequência alvo (ARNDT; MACHADO; SCREMIN, 2016).

Um procedimento análogo ao método adaptativo proposto por Arndt (2009) é desenvolvido no âmbito da PUAIG, sendo que o passo inicial consiste em obter uma frequência alvo através da AIG pura, e em seguida efetuar enriquecimentos com o modo da frequência alvo para melhorar a solução. A figura 28 mostra o fluxograma de implementação da PUAIG adaptativa, baseada na metodologia de Arndt (2009).

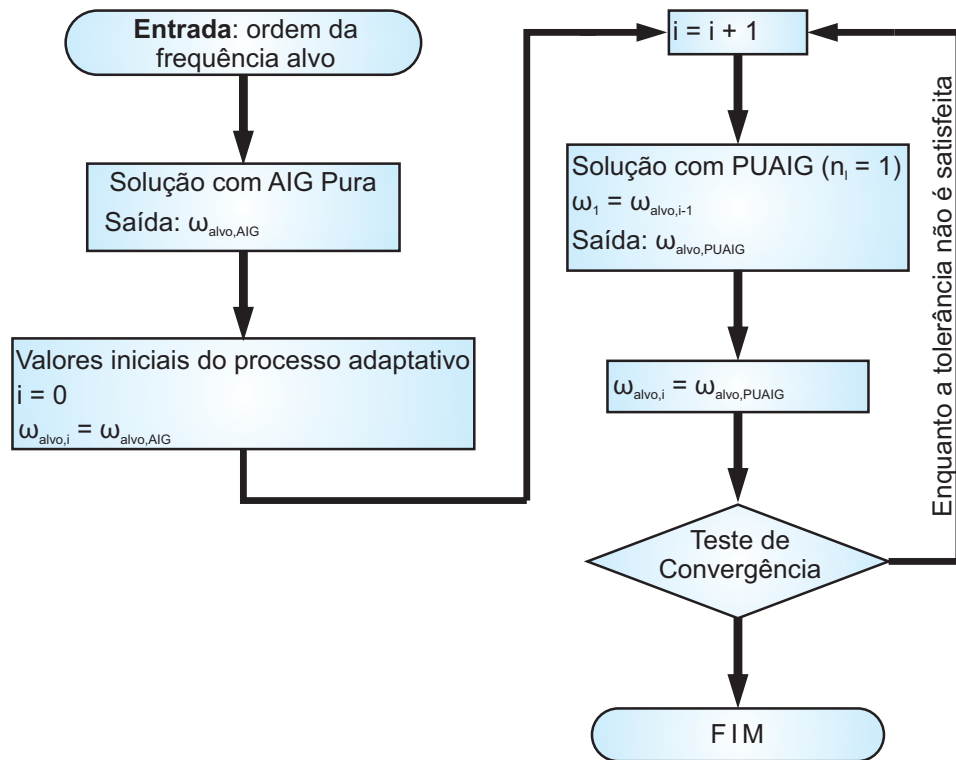


FIGURA 28 – FLUXOGRAMA DE IMPLEMENTAÇÃO DA PUAIG ADAPTATIVA PARA VIBRAÇÃO LIVRE

Um detalhe importante na PUAIG adaptativa que a diferencia do MEFG adaptativo, é a necessidade de rearranjar a frequência alvo para o espaço paramétrico, conforme ilustrado na Figura 29. A frequência de vibração no enriquecimento deve ser rearranjada para o espaço paramétrico na forma de frequência adimensional, a fim de efetuar um enriquecimento correto.

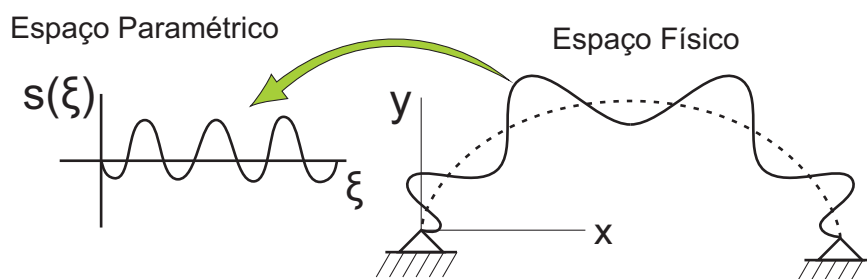


FIGURA 29 – REINSERÇÃO DO MODO DE VIBRAR NO ESPAÇO PARAMÉTRICO

Vários procedimentos para obter a frequência adimensional podem ser realizados. Para os casos onde as propriedades de material são homogêneas é possível

utilizar os processos de adimensionalização diretos como, por exemplo, para o problema de vigas (HSU, 2016b; LEE; PARK, 2013):

$$\omega_p^2 = \lambda l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad (175)$$

onde  $\omega_p$  é a frequência adimensional e  $l$  é o vão teórico da viga. Para casos mais gerais é possível obter as frequências adimensionais a partir do modo  $\mathbf{u}$  pelo quociente de Rayleigh, neste caso dado pela expressão:

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{u}}, \quad (176)$$

onde  $\bar{\mathbf{K}}$  e  $\bar{\mathbf{M}}$  são respectivamente as matrizes de rigidez e massa adimensionais, ou seja, sem mapeamento. Portanto para a obtenção das matrizes de rigidez e massa adimensionais o número de mapeamento  $J(\xi) = 1$  ou, para o caso bidimensional,  $\det(\mathbf{J}) = 1$ . Como no processo de obtenção das matrizes são conhecidas as funções de aproximação e suas derivadas, um procedimento de obtenção da frequência natural adimensional pode ser obtido de forma direta sem a necessidade de obter as matrizes adimensionais, que consiste na aplicação do quociente de Rayleigh sob o ponto de vista energético, podendo ser escrito na forma (WIBERG; ABDULWAHAB; LI, 1997):

$$\omega_p^2 = \frac{\int_0^1 (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{u}) d\xi}{\int_0^1 (\mathbf{u})^T \rho(\mathbf{u}) d\xi}, \quad (177)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz relações constitutivas do problema. Ressalta-se que as integrações são realizadas diretamente no domínio do espaço paramétrico  $\xi$ .

Com base no procedimento adaptativo para a vibração livre, neste trabalho é proposto um procedimento adaptativo para o fenômeno de vibração forçada. Esta implementação adaptativa consiste em:

1. Fazer uma análise prévia com AIG pura, obtendo um campo de deslocamentos inicial;

2. Passar o campo de deslocamentos obtido no item 1 para o domínio da frequência;
3. Verificar os modos dominantes obtidos no item 2;
4. Fazer uma análise enriquecida com os modos dominantes obtidos;
5. Passar o campo obtido no modelo enriquecido para o domínio da frequência;
6. Repetir os itens 4 e 5 quantas vezes for necessário, até que não haja mais modos dominantes adicionais.

A verificação dos modos dominantes se dá ao escrever a oscilação no domínio da frequência, através de uma transformada rápida de Fourier. Neste trabalho utiliza-se o algoritmo de Cooley-Tukey (RAO; KIM; HWANG, 2011; BRIGHAM, 1988). Os modos dominantes são captados e inseridos como funções de enriquecimento em uma próxima iteração do processo. A figura 30 mostra o fluxograma de implementação do procedimento adaptativo para a vibração forçada.

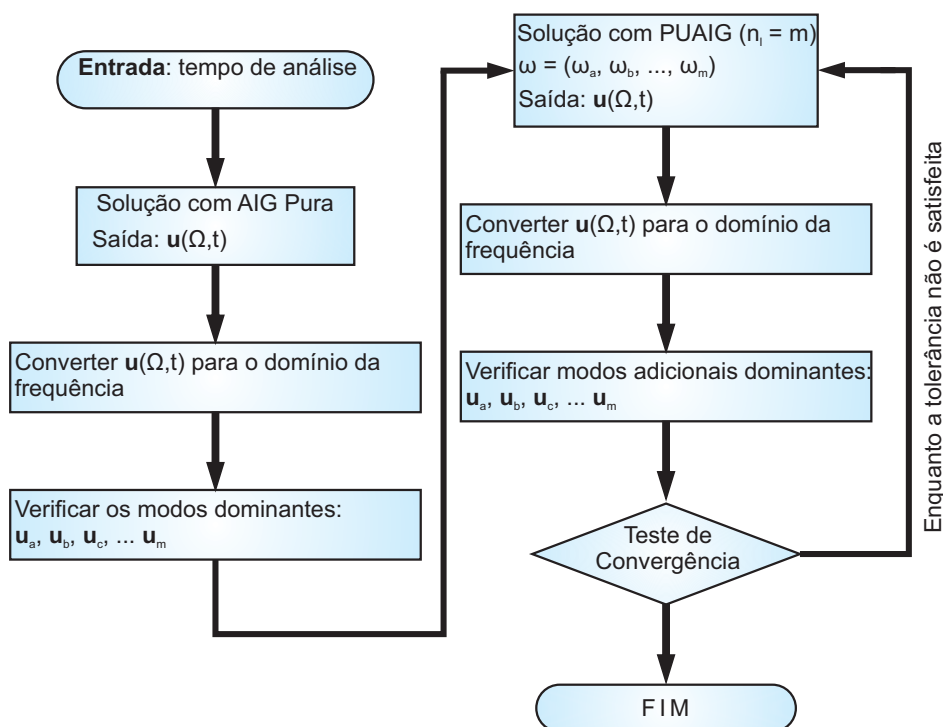


FIGURA 30 – FLUXOGRAMA DE IMPLEMENTAÇÃO DA PUAIG ADAPTATIVA PARA VIBRAÇÃO FORÇADA

Com os detalhes da formulação da PUAIG e seus procedimentos adaptativos, uma gama de experimentos numéricos é desenvolvida e mostrada a seguir, a fim de validar a PUAIG e testar sua eficácia.

## 6 PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

Neste capítulo são apresentadas verificações numéricas a fim de validar e comparar a eficiência da PUAIG com a AIG pura, o MEF e o MEFG. Os métodos são comparados em termos de erro relativo, medido através de uma solução analítica ou uma solução de referência com alto refinamento. O erro relativo para as frequências é dado por:

$$e = \frac{(\omega^h - \omega)}{\omega}, \quad (178)$$

onde  $\omega^h$  é a solução aproximada e  $\omega$  a solução de referência. A aproximação para toda a amostra de frequências é medida através do espectro de frequências normalizado, onde as frequências são normalizadas com a sua solução de referência e o número do modo normalizado com o número total de modos da amostra. Esta medida foi utilizada inicialmente Hughes (2012) para o MEF e posteriormente por Cottrell et al. (2006) para a AIG. Detalhes algébricos desenvolvidos por Cottrell et al. (2006) mostram que o espectro de frequências de um determinado método não se altera para refinamento  $h$ .

Nos problemas de vibração forçada o erro numérico acumulado é avaliado em função de uma solução analítica ou de referência. Uma medida para o erro em problemas transientes foi utilizada por Torii e Machado (2010), que utilizaram a área da diferença entre os deslocamentos aproximado e de referência. Esta área é medida de maneira discreta, pela forma (TORII; MACHADO, 2012):

$$e = \int |u_i(t) - u_i^h(t)| dt \approx \sum_{i=1}^{n_t} \Delta t |u_i - u_i^h|, \quad (179)$$

onde  $n_t$  é o número de passos de tempo,  $u_i$  e  $u_i^h$  são os deslocamentos analítico e numérico, respectivamente, em cada ponto. Para a obtenção da resposta transiente é

utilizado o método de Newmark com aceleração linear, sendo os parâmetros e algoritmo apresentados por Chopra (1995) e Torii (2012).

São avaliados também os números de condição matricial dado por (CHENEY; KINCAID, 2007; TREFETHEN; BAU, 1997):

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|, \quad (180)$$

onde  $\|A\|$  denota a norma euclidiana da matriz para cálculo do número de condição e  $\|A^{-1}\|$  a norma da matriz inversa. Neste trabalho é avaliado o condicionamento da matriz de massa dos problemas dinâmicos. O trabalho de Petroli (2016) mostrou que o condicionamento da matriz massa é dominante no problema de autovalores para o caso do GFEM convencional. Os experimentos feitos por Petroli (2016) indicaram que a matriz de massa deixa de ser definida positiva quando o seu número de condição matricial ultrapassa o número de dígitos significativos utilizado.

A título de identificação dos resultados nos gráficos e tabelas, a tabela 1 mostra um resumo da referência de identificação e a formulação testada.

TABELA 1 – IDENTIFICAÇÃO DAS FORMULAÇÕES DA PUAIG

Referência	AIG Pura	Partição da Unidade	Enriquecimento Tipo
PUAIG BS	NURBS Grau $p$	B-Splines Grau $p$	Global
PUAIG Lin	NURBS Grau $p$	Linear	Global
PUAIG L	NURBS Grau $p$	B-Splines Grau $p$	Local
PUAIG Pol	NURBS Grau $p$	Polinomial	Global
PUAIG 1	B-Splines Grau 1	Linear	Local

## 6.1 EXEMPLO 1 - BARRA UNITÁRIA

O primeiro exemplo de verificação numérica consiste em uma barra fixa nas duas extremidades, conforme mostra a figura 31. As propriedades de material utilizadas são  $E = 1N/m^2$ ,  $A = 1m^2$ ,  $\rho = 1kg/m^3$  e  $L = 1m$ . O modelo de vibração livre de uma barra reta fixa nas duas extremidades tem solução analítica conhecida, dada por (PETYT, 2010):

$$\omega_i = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, i = 1, 2, 3, \dots \quad (181)$$

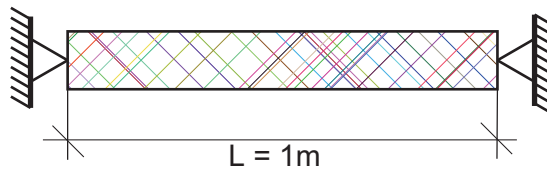


FIGURA 31 – BARRA UNITÁRIA FIXA NAS DUAS EXTREMIDADES

Para este problema, serão estudados os casos de refinamento  $h$ , refinamento  $p$ , refinamento  $k$  e refinamento adaptativo, para o MEF convencional, o MEFG, o AIG puro e o método aqui proposto, PUAIG.

### 6.1.1 Refinamento $h$

O modelo de barra para o refinamento  $h$  foi desenvolvido para o MEF, com elementos lineares e para a AIG com grau polinomial  $p = 2$ . Já a PUAIG é desenvolvida com base polinomial  $p = 2$  e refinamentos do tipo  $C^0$ . O enriquecimento local utilizado no refinamento  $h$  se dá com funções Arndts e PU B-Splines. As figuras 32 - 37 mostram os erros relativos para as 6 primeiras frequências naturais de vibração, com enriquecimento correspondente ao primeiro modo ( $\beta_1 = \pi$ ). Comparativamente são mostrados os resultados do MEFG para barra com refinamento  $h$  apresentados



por (ARNDT, 2009), que utilizou 1 nível de enriquecimento com parâmetro  $\beta_1 = \pi$ .

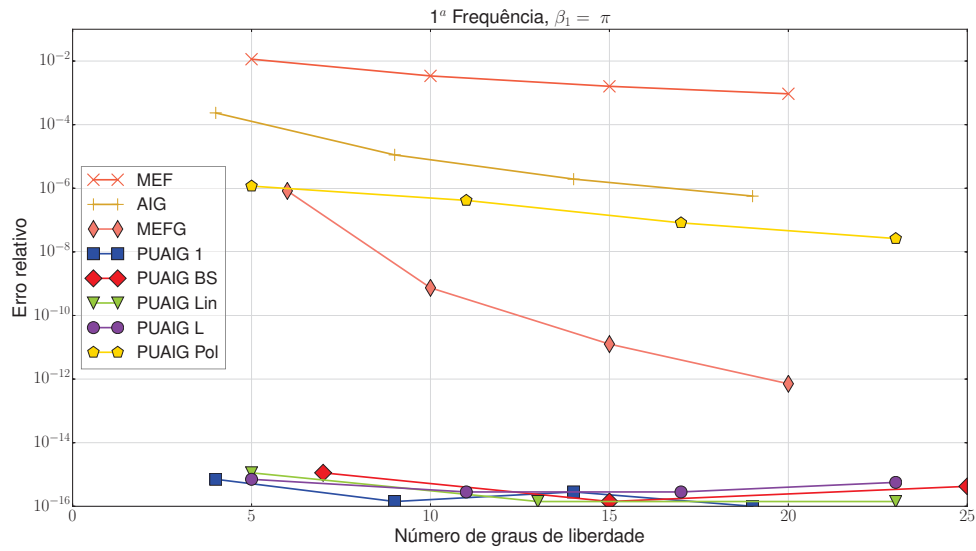


FIGURA 32 – ERRO RELATIVO DA 1ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA

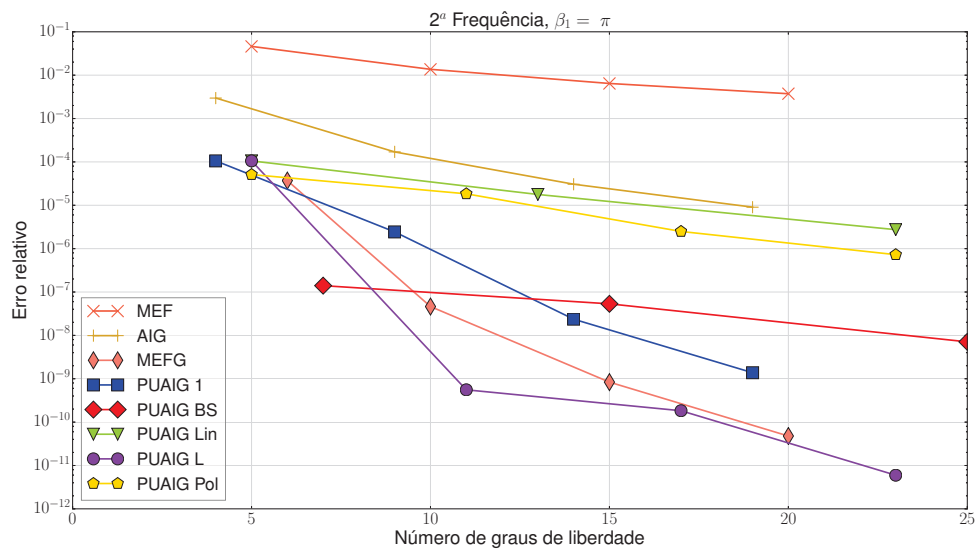


FIGURA 33 – ERRO RELATIVO DA 2ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA

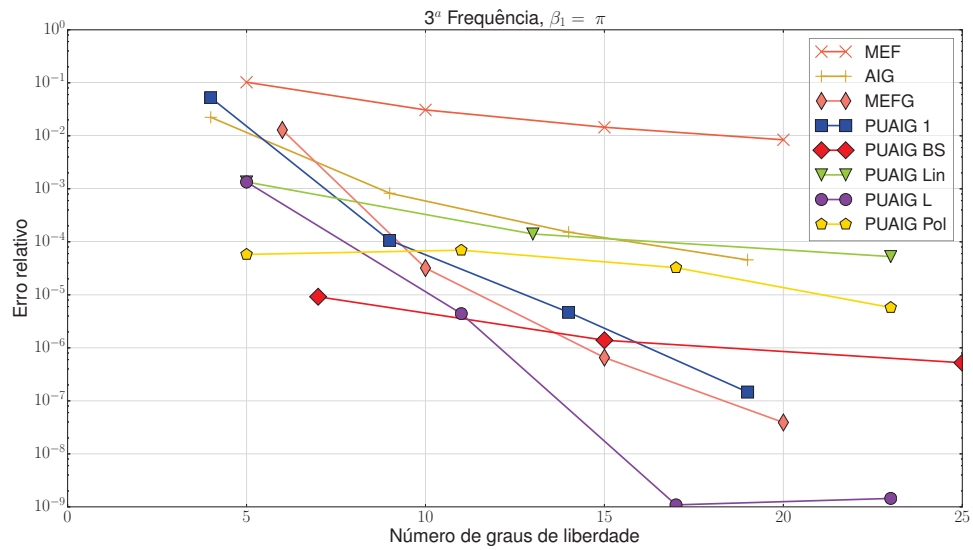


FIGURA 34 – ERRO RELATIVO DA 3ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $H$

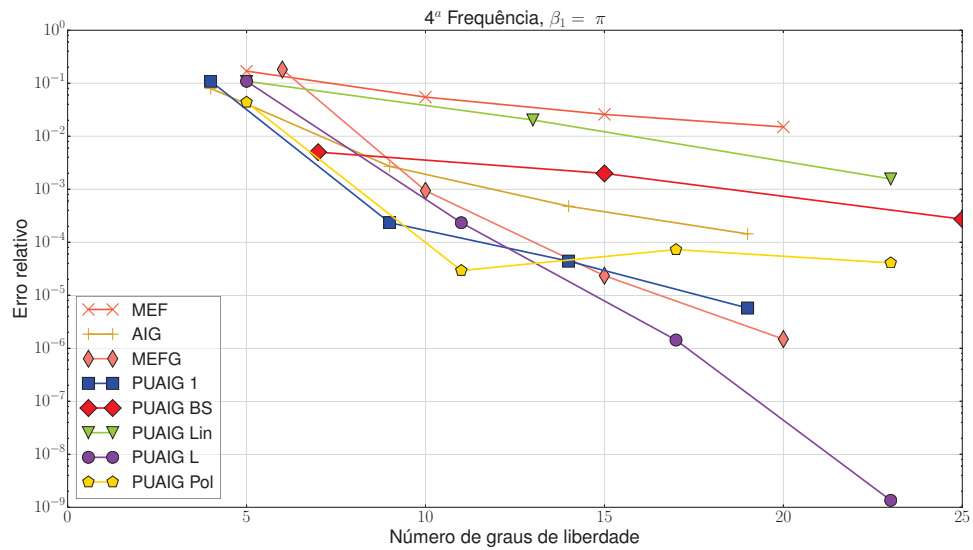


FIGURA 35 – ERRO RELATIVO DA 4ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $H$

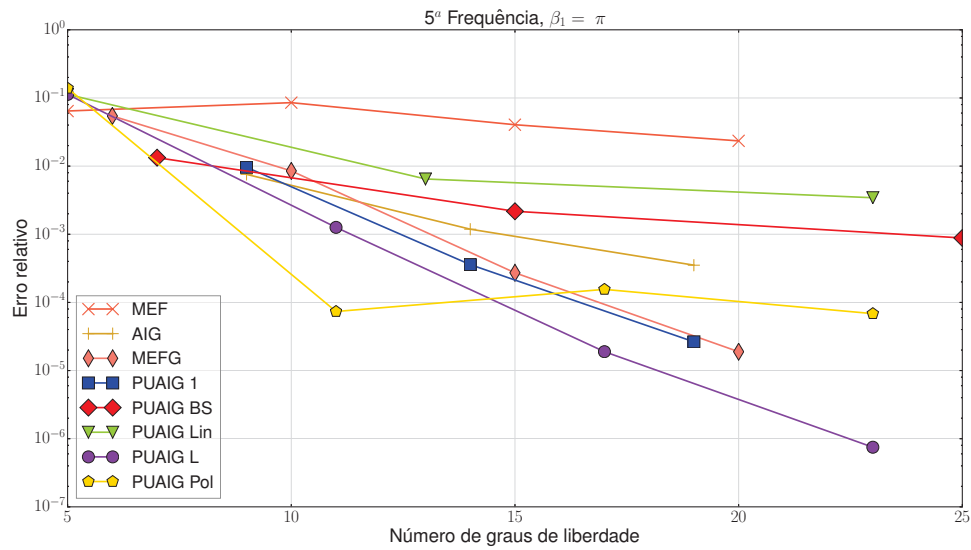


FIGURA 36 – ERRO RELATIVO DA 5ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $H$

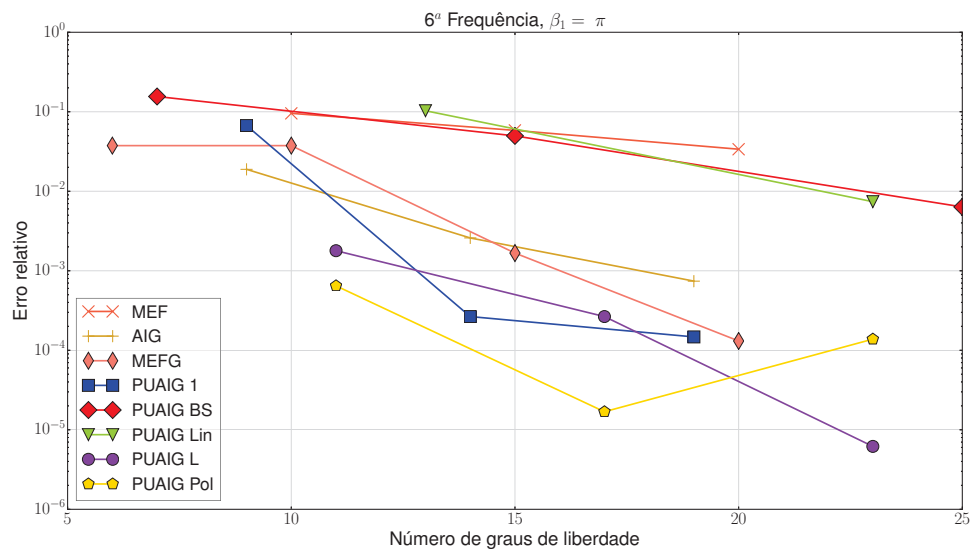


FIGURA 37 – ERRO RELATIVO DA 6ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $H$

As frequências correspondentes ao primeiro modo com a PUAIG, mostradas na figura 32 possuem acurácia elevada, correspondente ao erro de máquina em 16 dígitos significativos. Pequenas perturbações ocorrem devido a erros de arredondamento. Apesar de menos preciso, o resultado do MEFG desenvolvido por (ARNDT, 2009) apresenta a maior taxa de convergência para a primeira frequência. Ressalta-

se que devido ao fato de se adotar um modo de enriquecimento correspondente ao primeiro modo natural analítico ( $\beta_1 = \pi$ ), resulta em excelentes convergências em praticamente todos os modelos enriquecidos.

Para de demais frequências analisadas a PUAIG com enriquecimento local (PUAIG L) apresentou os resultados com maior acurácia e maior taxa de convergência. A PUAIG 1 apresentou resultados muito próximos aos do MEFG nas frequências mais elevadas, o que é justificável devido a base de funções, tanto PU quanto enriquecimento, serem as mesmas. É possível notar nas figuras 33 - 37 que os enriquecimentos do tipo global (PUAIG BS, PUAIG Lin e PUAIG Pol) vão perdendo sua precisão em função do aumento das frequências, sendo menos precisos do que a própria AIG pura. Dentre estas 3 formas de enriquecimento global, a PUAIG Pol manteve melhor precisão do que as demais formas globais.

O espectro de frequências pode ser analisado através da figura 38 onde as frequências aproximadas são normalizadas com o resultado analítico e os modos normalizados com o número total de graus de liberdade do modelo. Os espectros do MEF, da AIG e da PUAIG são comparados com o do MEFG obtido por Arndt e Machado (2013).

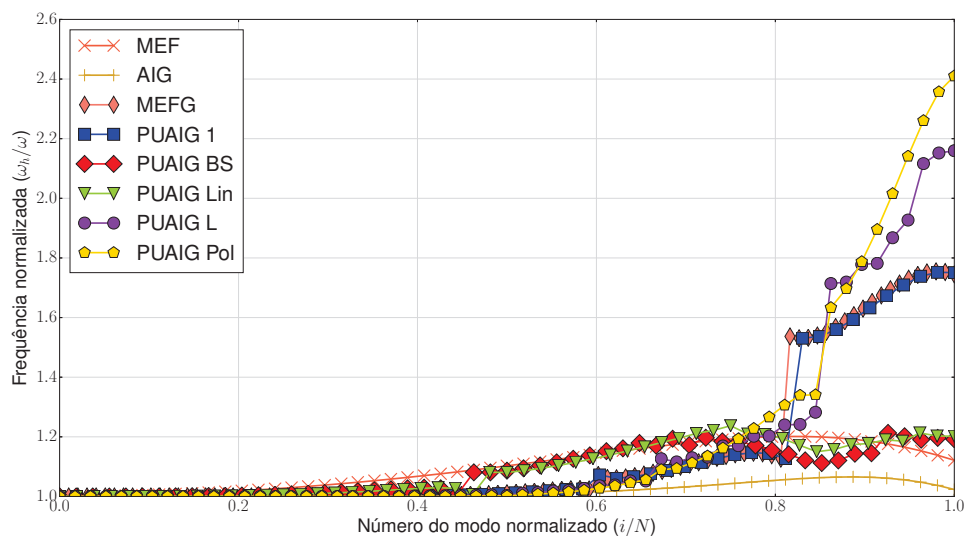


FIGURA 38 – ESPECTROS DE FREQUÊNCIA DA BARRA UNITÁRIA

A figura 38 mostra a ocorrência de saltos abruptos na região próxima a 80% da amostra para as formulações da PUAIG com enriquecimento local, o MEFG, e também na PUAIG Polinomial, onde os erros das frequências mais altas tornam-se acentuados. A AIG pura apresenta o espectro mais bem comportado, fato já observado por Cottrell et al. (2006) e Rauen, Machado e Arndt (2017b). Neste trabalho acentua-se tal efeito vantajoso da AIG pura ao comparar também com a PUAIG Local. Já as formas de enriquecimento global apresentam saltos mais suaves na região próxima a 50% da amostra, e um espectro muito próximo do MEF, sendo mais bem comportado do que a PUAIG local. É possível observar que os espectros da PUAIG 1 e do MEFG são idênticos.

Os números de condição para o problema da barra são apresentados nas figuras 39 e 40, respectivamente para a matriz de massa e rigidez. É possível notar o elevado número de condição dos modelos com a PUAIG, especialmente os de enriquecimento local, que apresentam avanços mais acentuados no decorrer do refinamento. A PU com B-Splines apresenta condicionamento mais elevado. Comparativamente o número de condição da matriz de massa é superior em dois dígitos de precisão, aproximadamente. Enquanto os valores mais altos do número de condição da matriz de rigidez chegam próximos de  $10^{13}$ , o condicionamento da matriz de massa se aproxima da casa de  $10^{15}$ .

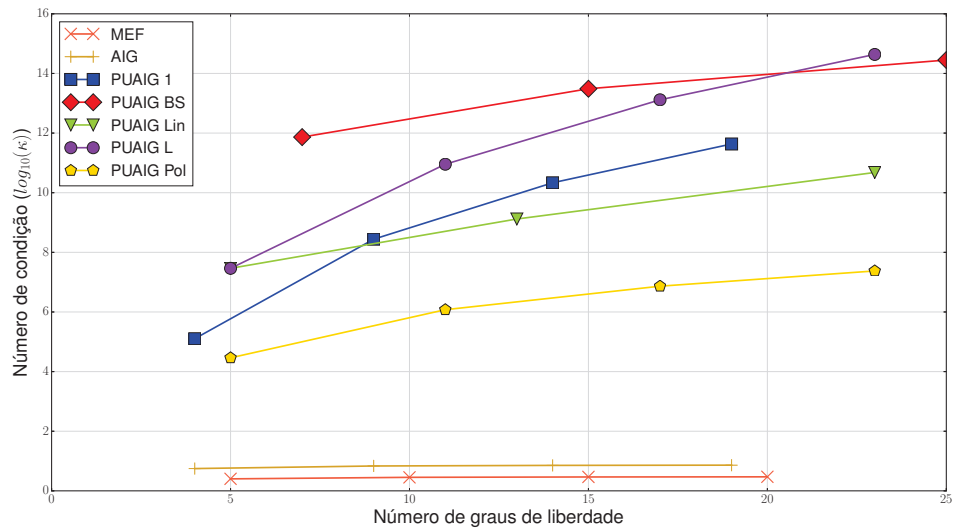


FIGURA 39 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA PARA A BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $H$

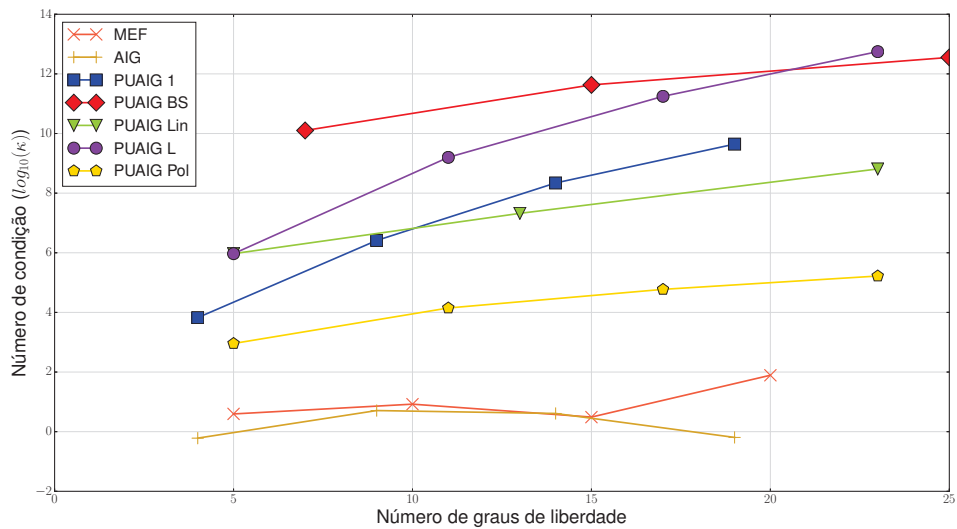


FIGURA 40 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA A BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $H$

### 6.1.2 Refinamento $k$

O refino  $k$  é um caso particular de refinamento, exclusivo do método AIG, tal como comentado no item 3.5. Por este motivo aqui são comparados apenas os

resultados desenvolvidos com a PUAIG e a AIG pura. Para o refinamento do tipo  $k$  são realizados testes com um único elemento, variando, portanto, apenas a ordem polinomial da AIG pura e da PU na formulação da PUAIG BS, partindo do grau  $p = 2$ . Os enriquecimentos realizados consideram apenas um nível e  $\beta_1 = \pi$ . As figuras 41 - 44 mostram os erros relativos das 4 primeiras frequências em função do número de graus de liberdade do sistema restrito.

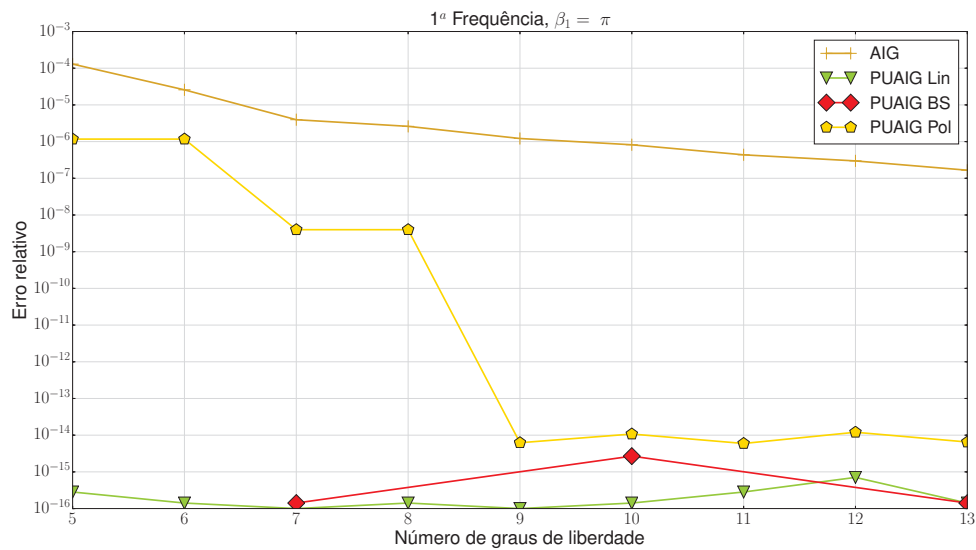


FIGURA 41 – ERRO RELATIVO DA 1ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $K$

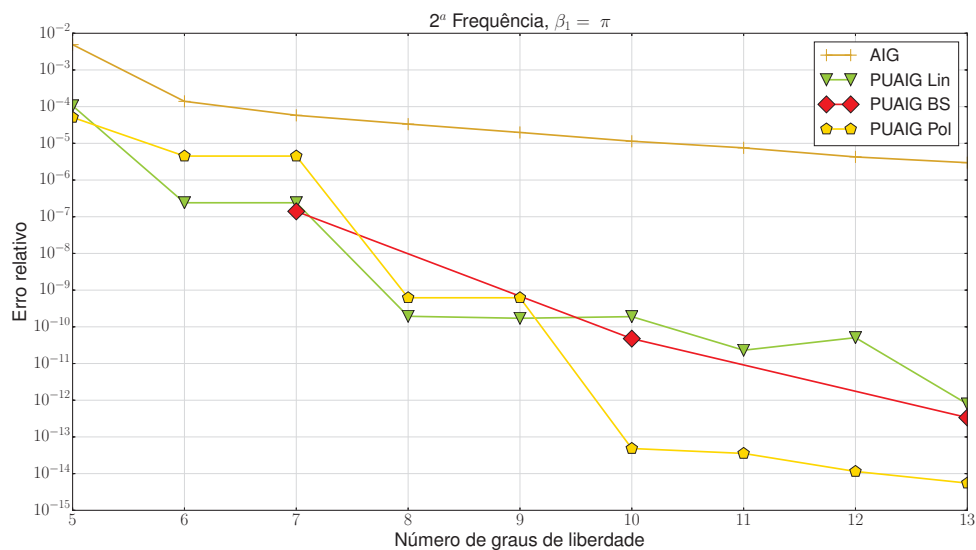


FIGURA 42 – ERRO RELATIVO DA 2ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $K$

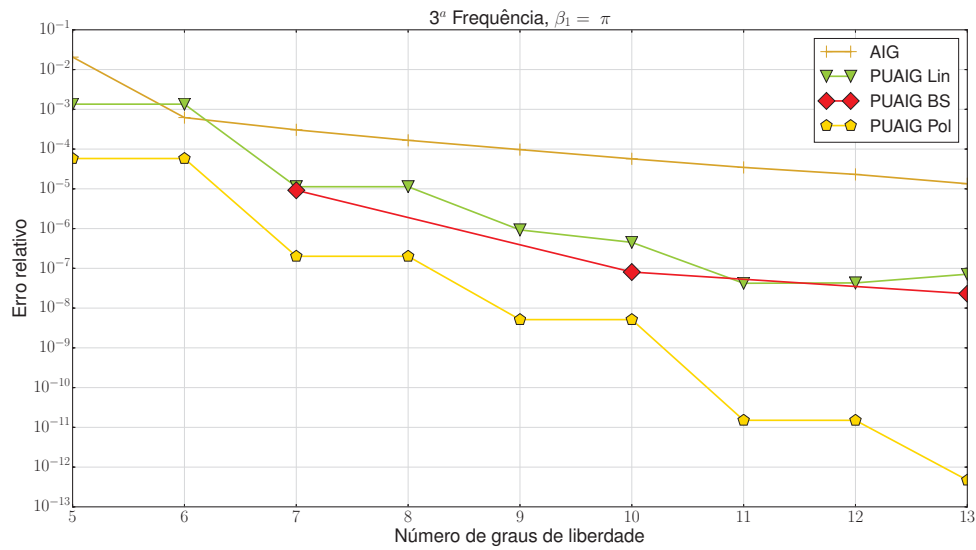


FIGURA 43 – ERRO RELATIVO DA 3ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $K$

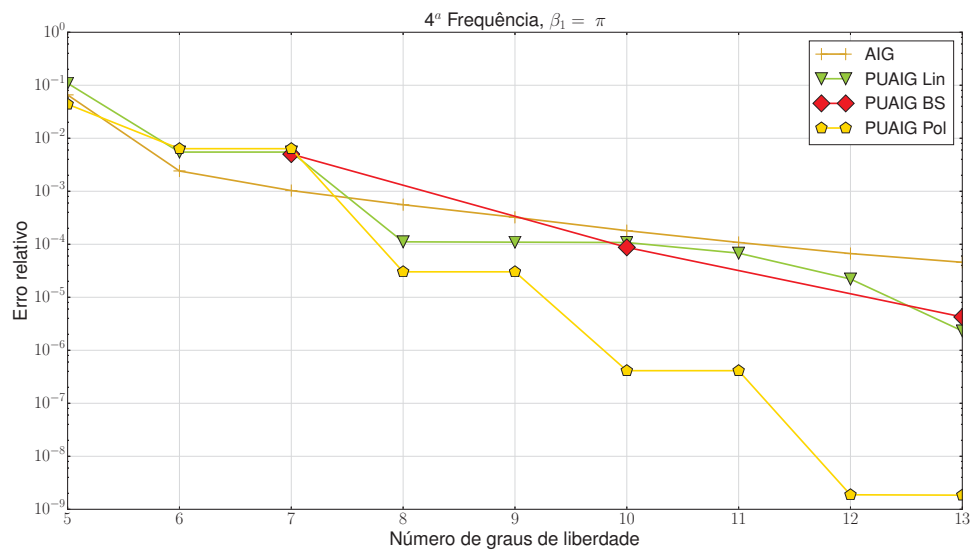


FIGURA 44 – ERRO RELATIVO DA 4ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $K$

A figura 41 mostra a mesma característica da PUAIG para a primeira frequência já observada no refinamento  $h$  onde a PUAIG, com exceção da PU Polinomial, alcança uma excelente aproximação com erros praticamente de máquina. A PUAIG com PU Polinomial apresenta um ganho considerável de acurácia a partir do grau polinomial  $p = 6$  na primeira frequência, e todos os modelos são mais precisos do que



a AIG pura. Para as frequências mais elevadas é possível notar uma perda da acurácia na PUAIG B-Splines e linear, onde na quarta frequência assumem praticamente os mesmos erros da AIG pura. Entretanto a PUAIG com PU Polinomial mantém uma taxa de convergência superior às demais e um notável ganho de precisão.

Os números de condição das matrizes de massa e rigidez do refinamento  $k$  são mostrados através das figuras 45 e 46. Pode-se notar um aspecto vantajoso da PU polinomial no refinamento  $k$  onde os números de condição mantiveram-se menores do que a PUAIG linear e B-Spline. Nota-se também que os números de condição da matriz de massa e da rigidez são muito próximos e ultrapassam a casa dos 16 dígitos significativos. Neste modelo foram encontrados modos espúrios nos modelos de barra com refinamento  $k$  quando utilizados 16 dígitos de precisão. Estes foram identificados como valores de frequências que não correspondem ao modelo real, autovaleores negativos ou com parcela imaginária. A eliminação completa destes modos espúrios se deu com a utilização de 32 dígitos de precisão.

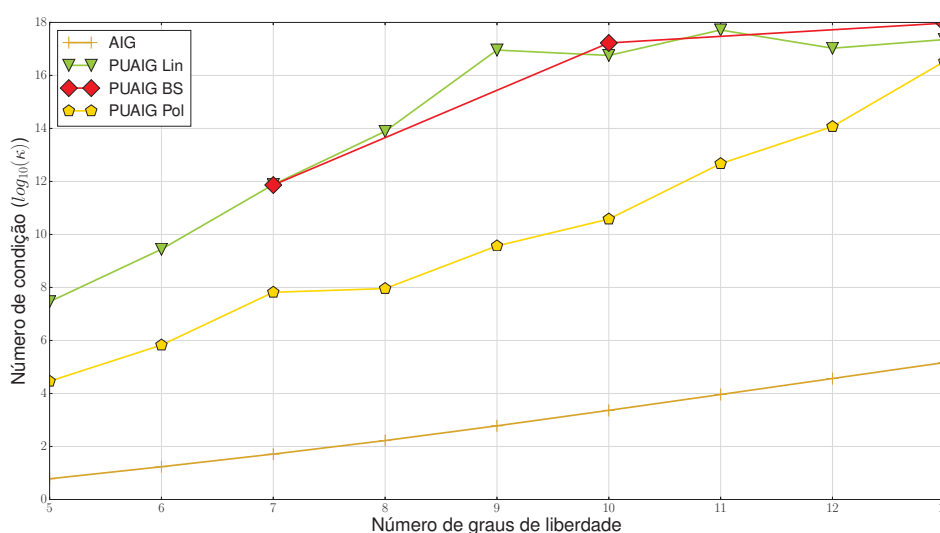


FIGURA 45 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA PARA A BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $k$

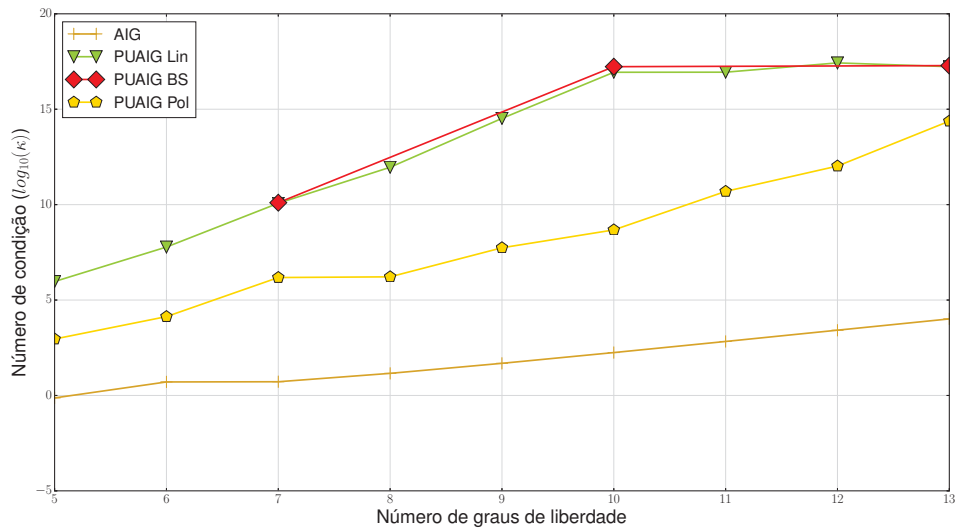


FIGURA 46 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA A BARRA UNITÁRIA PARA REFINAMENTO  $K$

### 6.1.3 Níveis de Enriquecimento

Neste experimento também são testados os erros relativos em função do aumento no número de níveis de enriquecimento. Os experimentos são modelados através de um único elemento com B-Splines de grau  $p = 2$ , e um aumento gradativo no número de níveis de enriquecimento com  $B_j = j\pi$ . Os resultados em termos de convergência são mostrados através das figuras 47 - 52, onde as formulações da PUAIG são comparadas com os resultados para o MEFG obtidos por Arndt (2009).

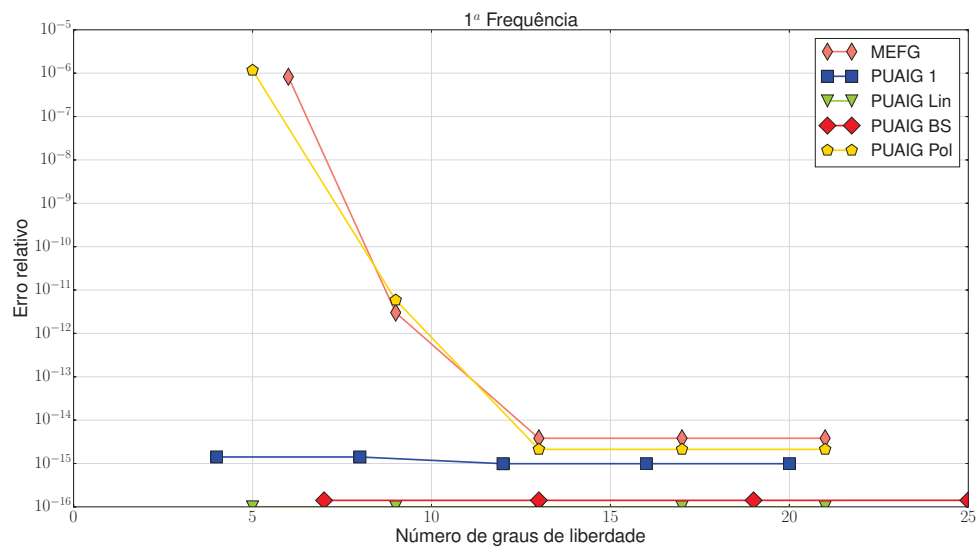


FIGURA 47 – ERRO RELATIVO DA 1ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

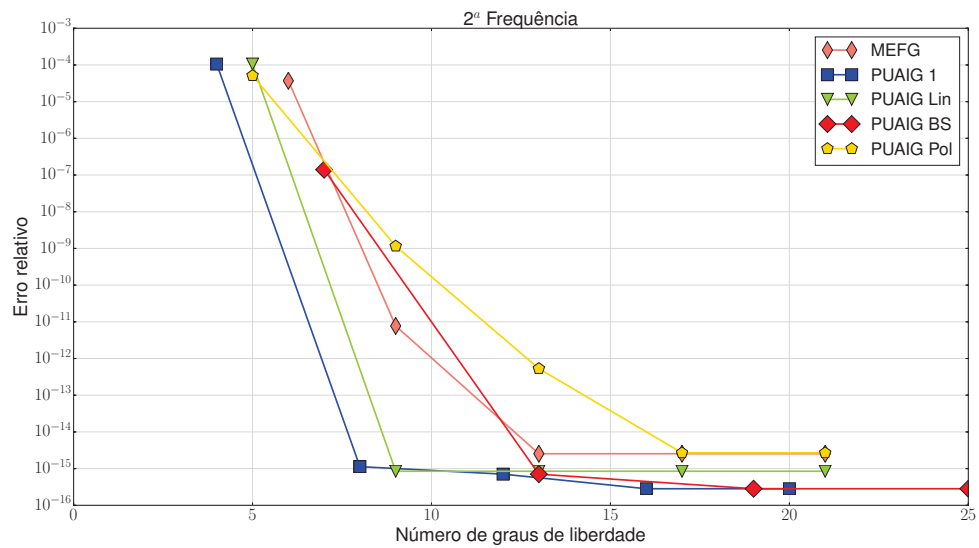


FIGURA 48 – ERRO RELATIVO DA 2ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

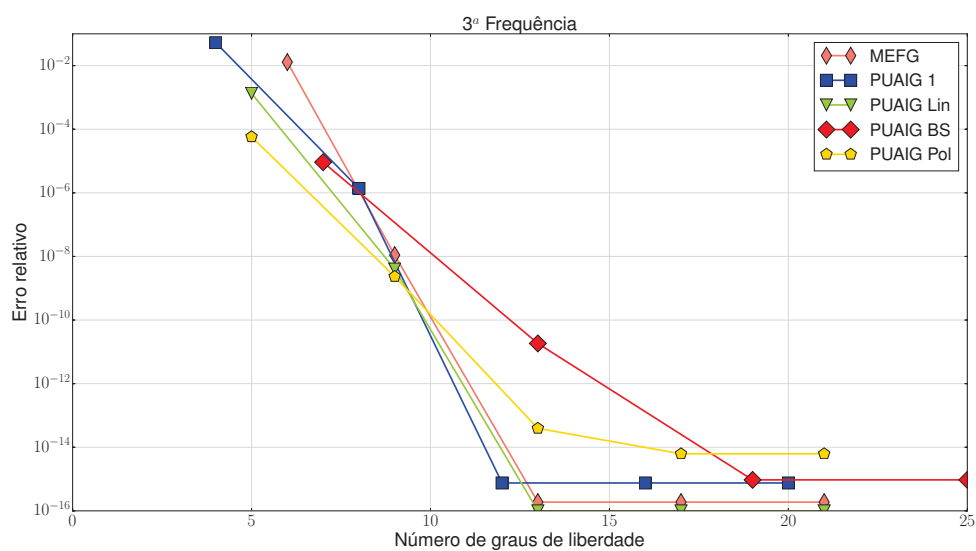


FIGURA 49 – ERRO RELATIVO DA 3ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

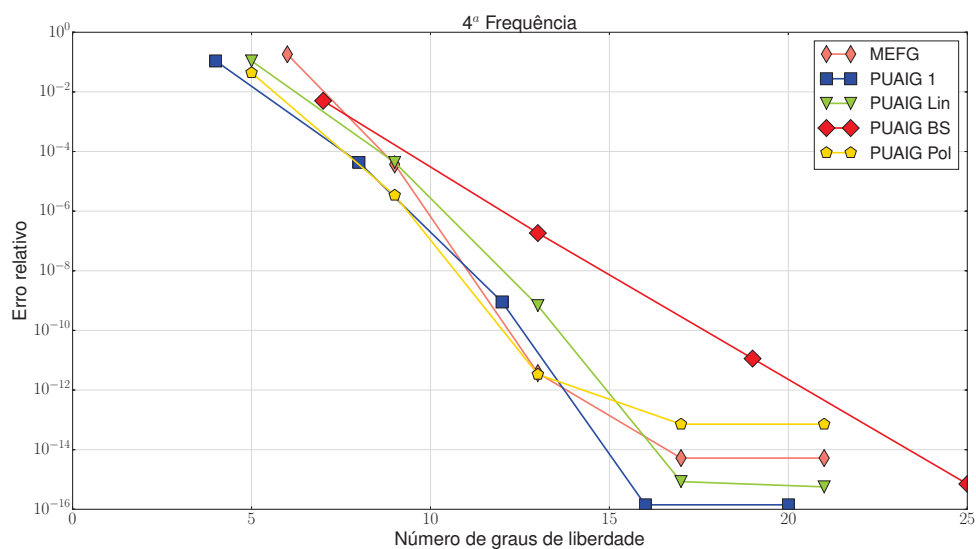


FIGURA 50 – ERRO RELATIVO DA 4ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

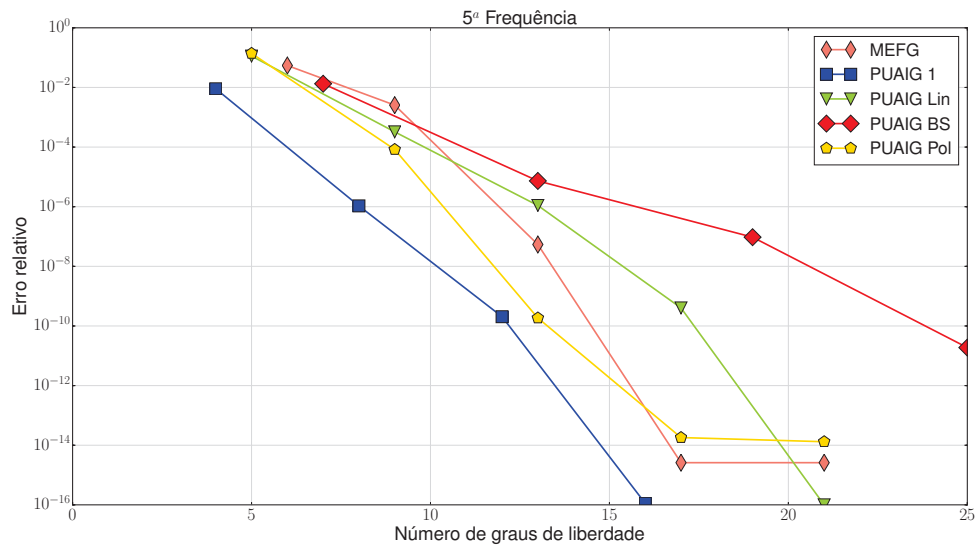


FIGURA 51 – ERRO RELATIVO DA 5ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

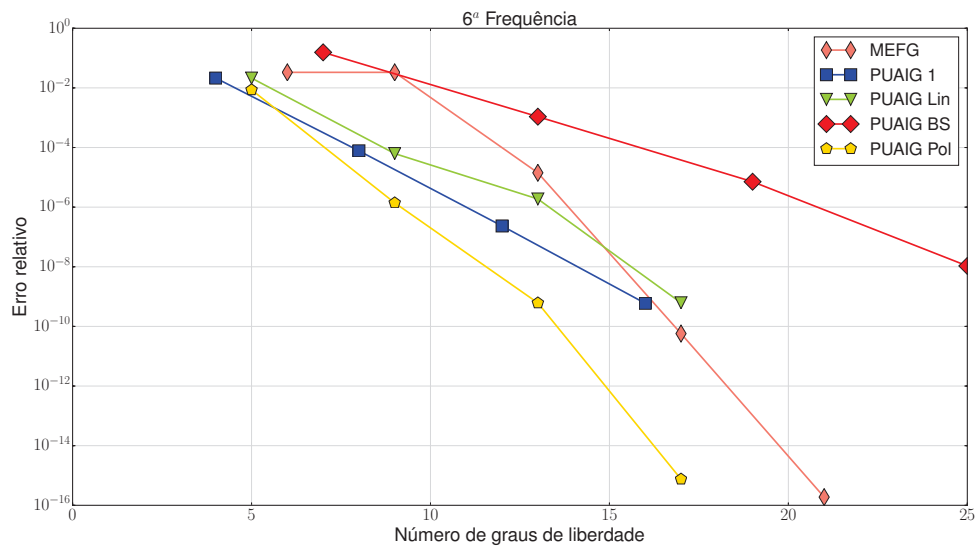


FIGURA 52 – ERRO RELATIVO DA 6ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

A figura 47 mostra a primeira frequência aproximada pela PUAIG atingir valores com erros não superiores a  $10^{-14}$ . A PUAIG com PU polinomial mostra um comportamento muito próximo ao MEFG, sendo a PUAIG Polinomial ligeiramente mais precisa que o MEFG. Na segunda frequência, mostrada na figura 48 é notável a alta convergência a partir do segundo nível de enriquecimento, onde a solução analítica

deste modo é inserida. Com exceção do MEFG e da PUAIG Polinomial, as demais formulações da PUAIG levam para resultados muito próximos do erro nulo da máquina em 16 dígitos significativos. Com o avançar das frequências a PUAIG BS vai perdendo em termos de acurácia para as demais formulações, e o MEFG destaca-se por manter boa convergência no avanço dos modos mais altos, concorrendo significativamente com a PUAIG Polinomial, no sexto modo (Figura 52), e com a PUAIG 1 e Linear até o quinto modo (Figura 51).

Os números de condição das matrizes de massa e rigidez são respectivamente apresentados nas figuras 53 e 54 as quais mostram um avanço dos números de condição das matrizes em função dos níveis de enriquecimento, onde, para os níveis mais altos, os condicionamentos oscilam na faixa de  $10^{18}$ . Os modelos desenvolvidos neste tipo de refinamento utilizaram 32 dígitos significativos para contornar qualquer problema de mal condicionamento matricial. Observa-se na PUAIG 1 condicionamentos muito próximos do MEFG, que foram apresentados no trabalho de Weinhardt et al. (2018).

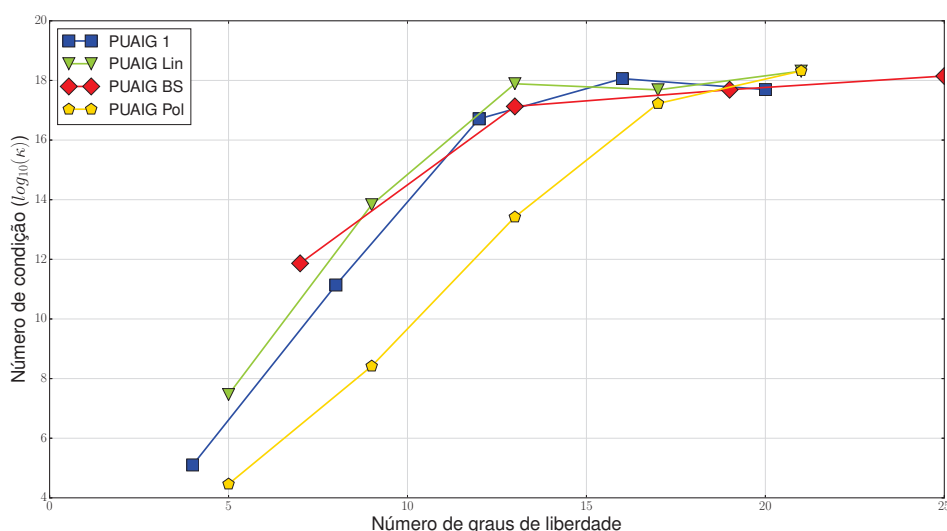


FIGURA 53 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA PARA A BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

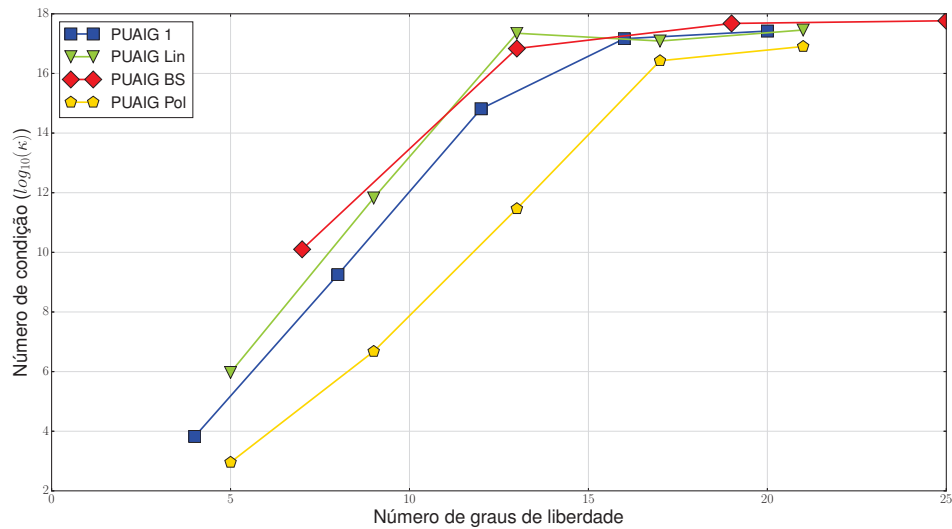


FIGURA 54 – NÚMEROS DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA A BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

O espectro de frequências para 2 níveis de enriquecimento é mostrado na figura 55, onde observa-se saltos de precisão à partir de 30% da amostra de frequências. Os resultados sofrem uma degradação mais alta na região de 60% da amostra e apresentam comportamentos similares. O método mais estável em termos do espectro de frequências é a PUAIG BS, seguida da PUAIG Linear, a PUAIG Polinomial e, por último a PUAIG 1.

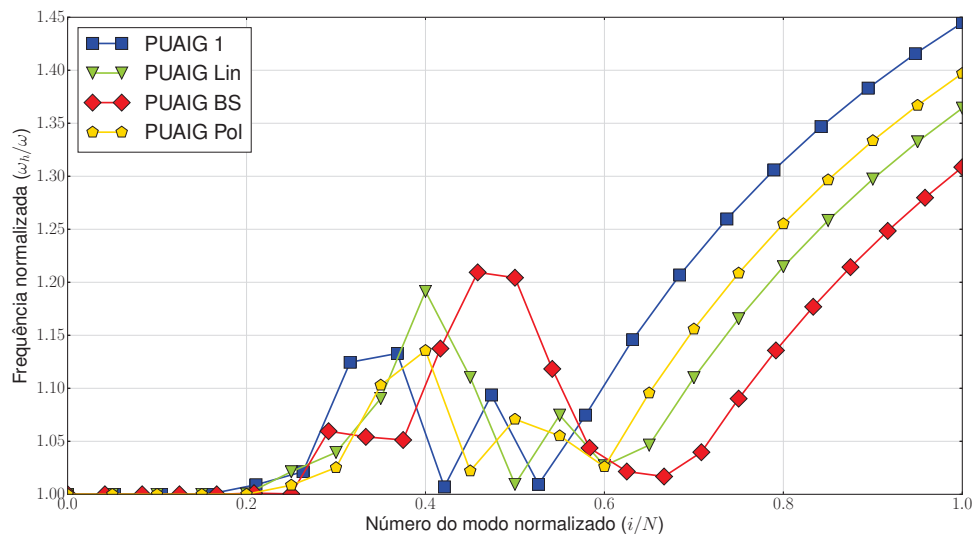


FIGURA 55 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS PARA A PUAIG COM 2 NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

#### 6.1.4 Refinamento Adaptativo

O refinamento adaptativo, conforme o procedimento descrito na figura 28, é testado com a PUAIG e comparado com os resultados obtidos por Arndt, Machado e Scremin (2010) para o MEFG, que utilizou um único elemento com funções lineares do MEF clássico e 1 nível de enriquecimento. Estes resultados foram previamente desenvolvidos por Rauen, Machado e Arndt (2017a) e aqui são estendidos para um maior número de frequências. Os erros relativos em função do número de iterações no processo adaptativo para as primeiras 6 frequências são mostrados nas figuras 56-61. Ressalta-se que a iteração 0 mostrada nos gráficos corresponde à AIG pura nos modelos da PUAIG e ao MEF puro no resultado do MEFG. Os experimentos com a PUAIG são realizados com 1 único elemento e funções B-Splines de grau  $p = 2$ .

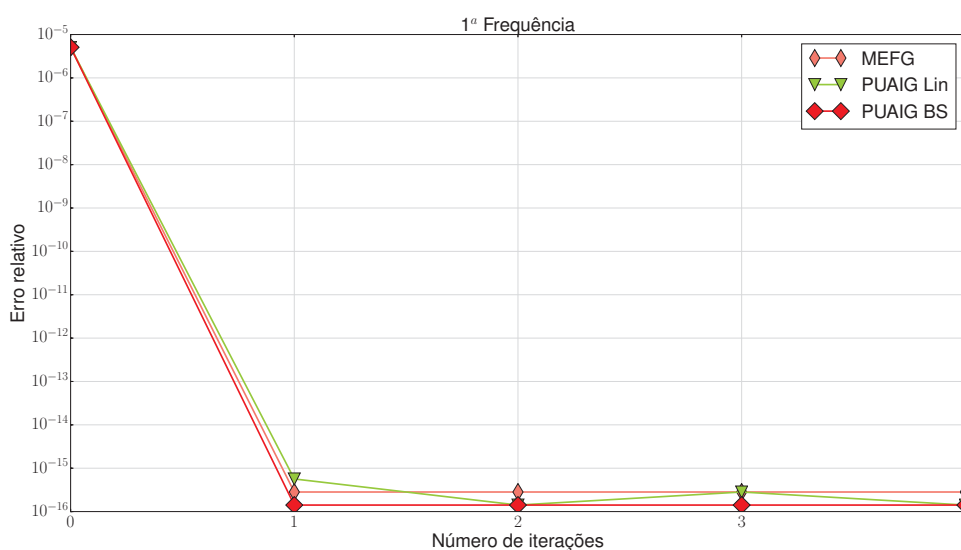


FIGURA 56 – ERRO RELATIVO DA 1<sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO



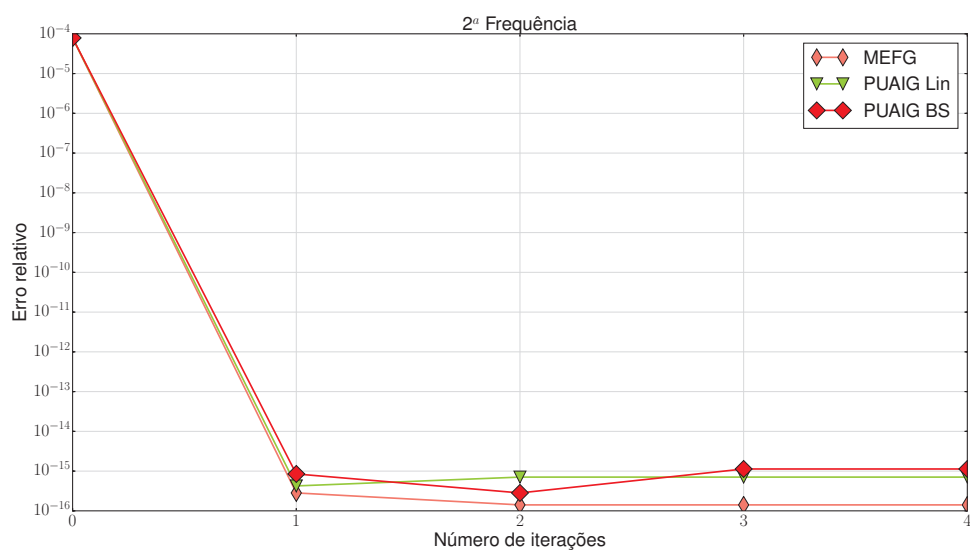


FIGURA 57 – ERRO RELATIVO DA 2ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

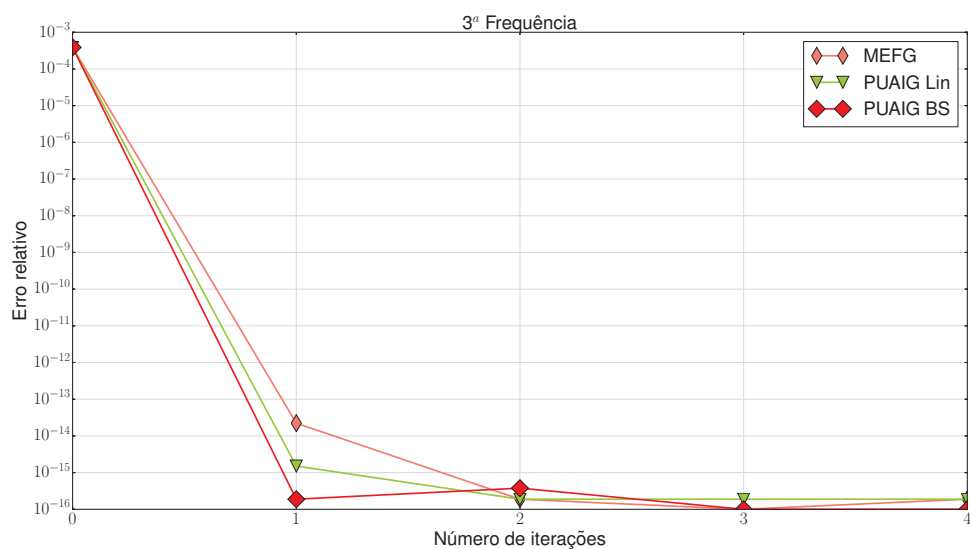


FIGURA 58 – ERRO RELATIVO DA 3ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

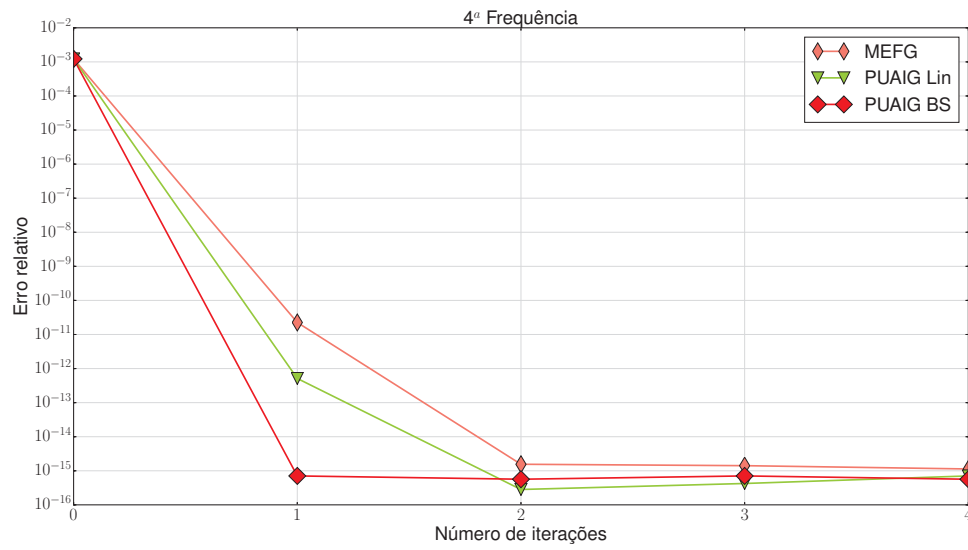


FIGURA 59 – ERRO RELATIVO DA 4ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

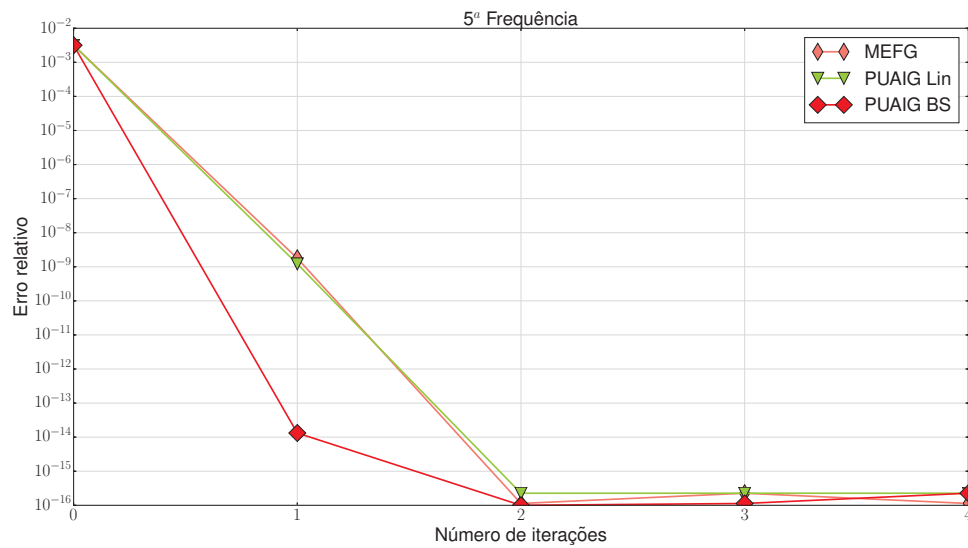


FIGURA 60 – ERRO RELATIVO DA 5ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

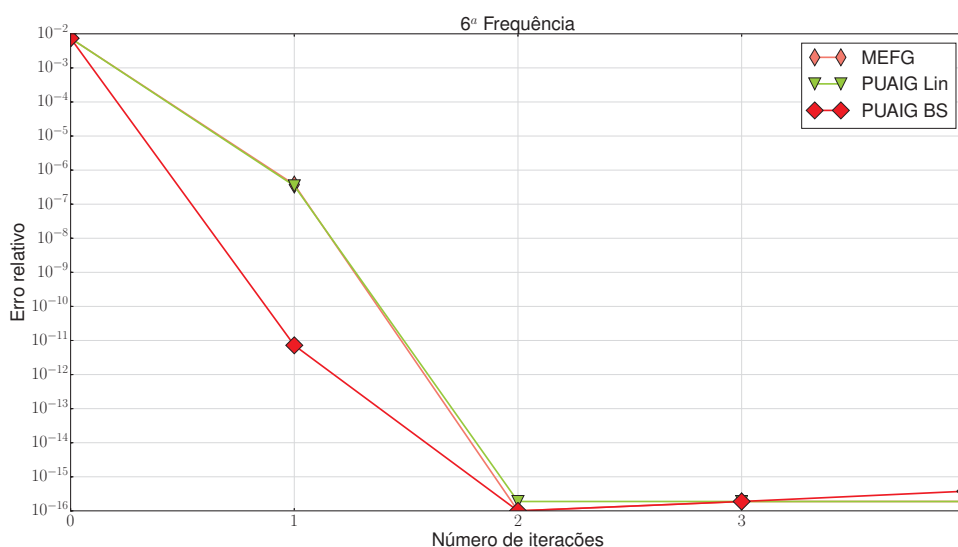


FIGURA 61 – ERRO RELATIVO DA 6<sup>a</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA UNITÁRIA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

Os resultados mostram que para as duas primeiras frequências o processo adaptativo convergiu para o erro de máquina já na primeira iteração em todas as formulações. Na terceira e quarta frequência (Figuras 58 e 59) a PUAIG com PU B-Splines conseguiu manter essa característica de alta precisão já na primeira iteração, diferente do MEFG e da PUAIG Linear, que levaram ao erro de máquina somente na segunda iteração. A PUAIG BS mantém melhor acurácia no decorrer das demais frequências, e a PUAIG Linear apresenta resultados similares ao MEFG, com ganhos de precisão da PUAIG Linear na 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> frequência.

## 6.2 EXEMPLO 2 - TRELIÇA DE SETE BARRAS

Neste exemplo é desenvolvido o modelo para a treliça de sete barras, ilustrada através da figura 62, inicialmente testada por (ZENG, 1998a) para o MC. Os parâmetros de material são  $A = 0.001m^2$ ,  $\rho = 8000kg/m^3$  e  $E = 2.1 \times 10^{11}Pa$ . No desenvolvimento da PUAIG é utilizado mapeamento CAD para dois elementos separados, que são acoplados nos pontos de junção mostrados através da figura 63. Os

pontos de controle do acoplamento são decompostos em coordenadas globais através do procedimento descrito na seção 4.4. Ressalta-se que este método de construir treliças constitui uma colaboração inédita, também apresentada neste trabalho.

Os resultados da treliça de sete barras são mostrados através 6 primeiras frequências naturais de vibração, discriminados na tabela 2. Os resultados para a AIG foram desenvolvidos por Rauen, Machado e Arndt (2017b) que utilizaram um esquema de acoplamento similar ao MEF para o desenvolvimento da treliça. Os resultados para o MEFG adaptativo foram desenvolvidos por Arndt (2009) que comparou com os resultados para o MEF e o MC, obtendo melhores resultados para o MEFG. As frequências obtidas para o MEF foram desenvolvidas por Cittadin (2017) para MEF com refinamentos  $h$  e  $p$ , sendo que o MEF  $p$  obteve melhores resultados. São mostradas as frequências para PUAIG PU B-Splines e a versão adaptativa, utilizando grau polinomial  $p = 2$ .

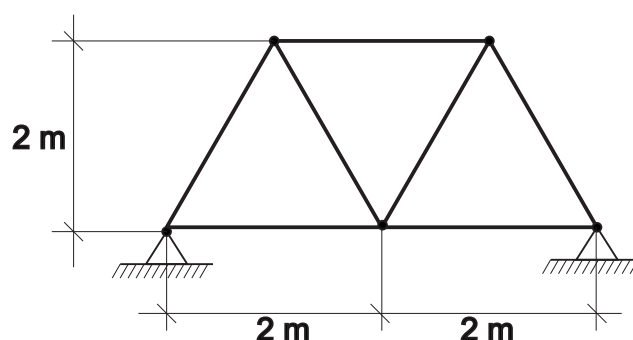


FIGURA 62 – TRELIÇA DE SETE BARRAS

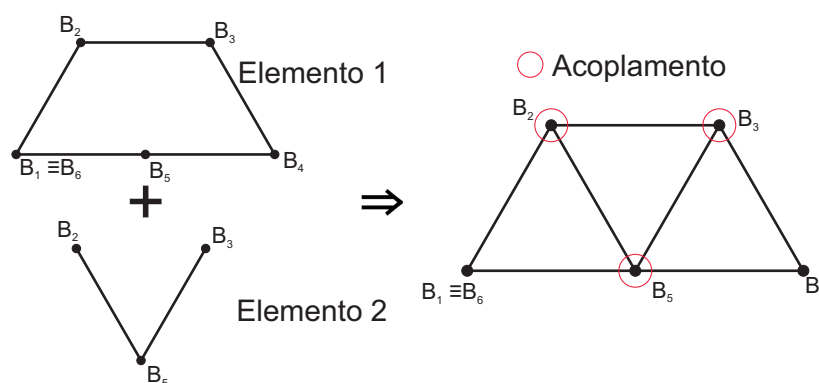


FIGURA 63 – ESQUEMA DE ACOPLAMENTO PARA TRELIÇA DE SETE BARRAS COM A PUAIG

TABELA 2 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO PARA A TRELIÇA DE SETE BARRAS

i	AIG <sup>1</sup> $p = 4$ 41 gdl	MEFG Adap <sup>2</sup> 34 gdl	PUAIG BS 40 gdl	MEF $p$ Grau 10 <sup>3</sup> 69 gdl	PUAIG Adap. 40 gdl
	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)
1	1647.78444024	1647.784428	1647.784428	1647.784432	1647.78442818
2	1740.83980941	1740.839797	1740.839797	1740.839798	1740.83979667
3	3111.32273903	3111.322715	3111.322759	3111.322714	3111.32271490
4	4561.81738862	4561.817307	4561.819122	4561.817309	4561.81731070
5	4823.24880036	4823.248678	4823.248970	4823.248677	4823.24867831
6	7379.48405189	7379.482322	7379.499794	7379.482327	7379.48232780

<sup>1</sup> Rauen, Machado e Arndt (2017b)

<sup>2</sup> Arndt (2009)

<sup>3</sup> Cittadin (2017)

Como o problema não dispõe de solução analítica, utiliza-se o fenômeno abordado por Arndt (2009), Becker, Carey e Oden (1983) que mostram a característica dos erros nas frequências de vibração serem incrementais ao seu valor, ou seja, a convergência para uma solução ideal se dá por valores superiores. Dada esta característica, observa-se na PUAIG Adaptativa valores mais precisos nas três primeiras frequências, sendo que o MEFG adaptativo e o MEF  $p$  superam ligeiramente a PUAIG nas três últimas frequências.

### 6.3 EXEMPLO 3 - BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA

O exemplo 4 trata de uma barra fixa em uma extremidade e submetida a uma força harmônica  $f(t) = f \sin(\omega t)$ , onde  $f$  é a intensidade da força,  $\omega$  representa uma frequência de excitação da força e  $t$  o tempo. O fenômeno é ilustrado através da figura 64 e possui solução analítica desenvolvida por Torii (2012), dada por:

$$u(x, t) = fx \sin(\omega t) + f \sum_{i=1}^{\infty} \{ \sin(k_n x) [C_n \sin(k_n ct) + B_n(t)] \}, \quad (182)$$

onde

$$C_n = -\frac{A_n \omega}{k_n c} \quad (183)$$

$$B_n(t) = \frac{A_n \omega^2 \sin(\omega t)}{c^2 k_n^2 - \omega^2} - \frac{A_n \omega^3 \sin(k_n ct)}{c^3 k_n^3 - c k_n \omega^2} \quad (184)$$

$$A_n = -\frac{2[k_n \cos(k_n) - \sin(k_n)]}{k_n^2} \quad (185)$$

$$k_n = \pi(n - 0.5). \quad (186)$$

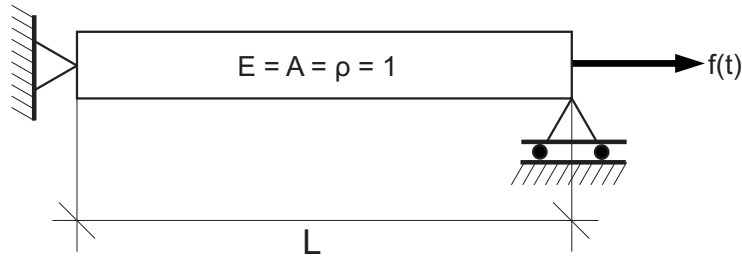


FIGURA 64 – BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA

As derivadas no tempo para as velocidades e acelerações são aqui desenvolvidas analiticamente e dadas por:

$$v(x, t) = fx \omega \cos(\omega t) + f \sum_{i=1}^{\infty} \{ \sin(k_n x) [C_n k_n c \cos(k_n ct) + \dot{B}_n(t)] \}, \quad (187)$$

$$a(x, t) = -fx \omega^2 \sin(\omega t) + f \sum_{i=1}^{\infty} \{ \sin(k_n x) [-C_n (k_n c)^2 \sin(k_n ct) + \ddot{B}_n(t)] \}, \quad (188)$$

com:

$$\dot{B}_n(t) = \frac{A_n \omega^3 \cos(\omega t)}{c^2 k_n^2 - \omega^2} - \frac{A_n \omega^3 k_n c \cos(k_n ct)}{c^3 k_n^3 - c k_n \omega^2} \quad (189)$$

$$\ddot{B}_n(t) = \frac{-A_n \omega^4 \sin(\omega t)}{c^2 k_n^2 - \omega^2} + \frac{A_n \omega^3 (k_n c)^2 \sin(k_n ct)}{c^3 k_n^3 - c k_n \omega^2}. \quad (190)$$

O modelo é desenvolvido com parâmetros  $E = 1 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$

,  $f = 1N/m^2$  e duas diferentes frequências excitadoras:  $\omega = 20rad/s$  e  $\omega = 25.13rad/s$ . A solução analítica é desenvolvida com 500 termos no somatório da equação 182. O método de Newmark é desenvolvido para um tempo total de  $t = 20s$ , com passo de tempo  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-3}s$ .

### 6.3.1 Frequência Excitadora $\omega = 20rad/s$

Para a frequência excitadora  $\omega = 20rad/s$ , inicialmente desenvolve-se uma análise para o MEF, a AIG e as formulações da PUAIG com  $\beta_1 = \pi$  e grau polinomial  $p = 2$ . A figura 65 mostra os deslocamentos no ponto  $x = 0.5m$  nos 2 primeiros segundos de análise para os métodos desenvolvidos, em comparação com a solução analítica. É possível observar graficamente que a PUAIG BS e a PUAIG Polinomial já se mostram muito próximas da solução analítica em termos de deslocamentos. As figuras 66 e 67 mostram os resultados de velocidades e acelerações no mesmo período de  $2s$ . A tabela 3 mostra os erros acumulados ao longo do tempo total, dos deslocamentos, velocidades e acelerações para os experimentos desenvolvidos com o MEF, a AIG e as versões da PUAIG, em comparação com os resultados para o MEFG desenvolvidos por Torii, Machado e Arndt (2015).

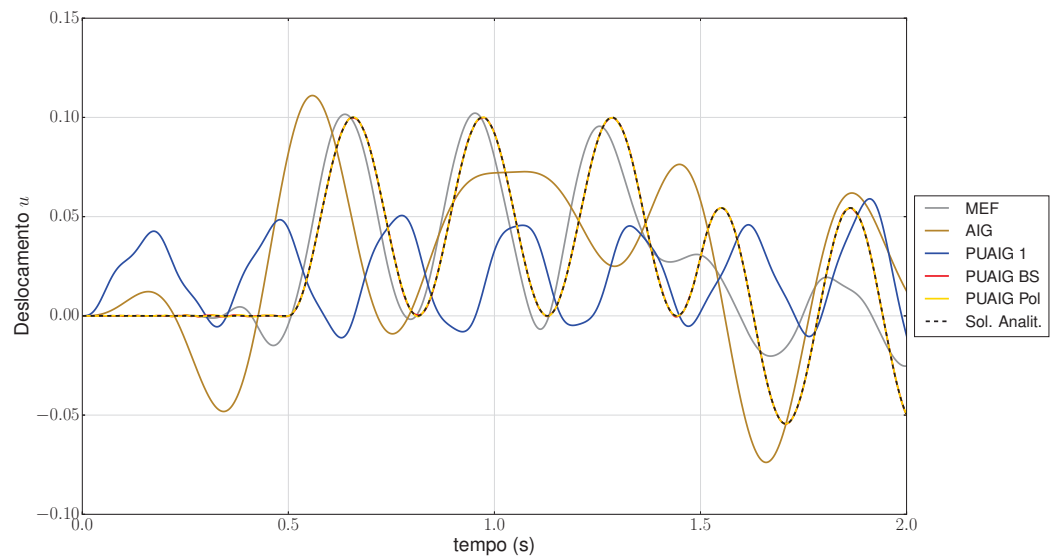


FIGURA 65 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM  $\omega = 20 \text{ RAD/S}$

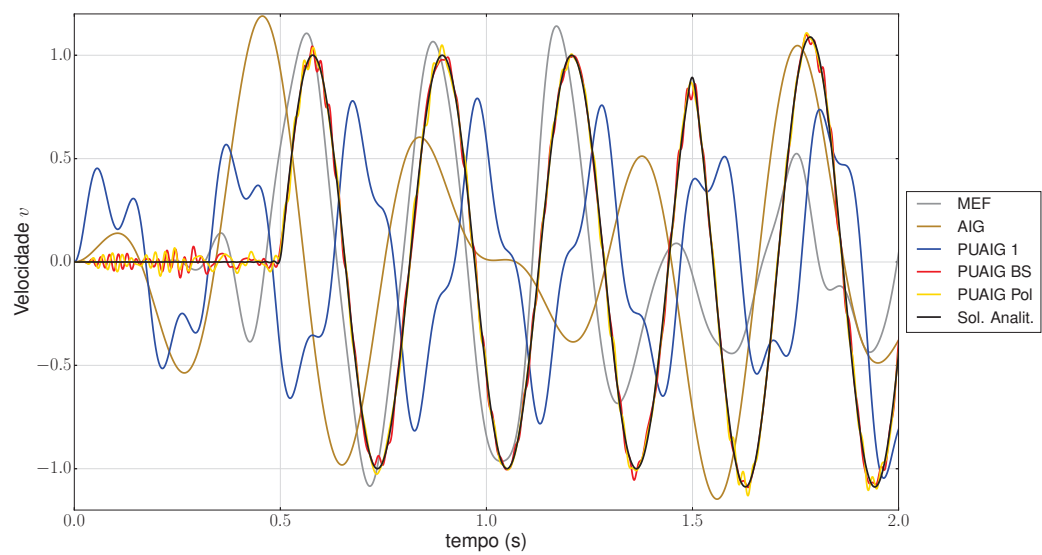


FIGURA 66 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA PARA A PRIMEIRA ITERAÇÃO



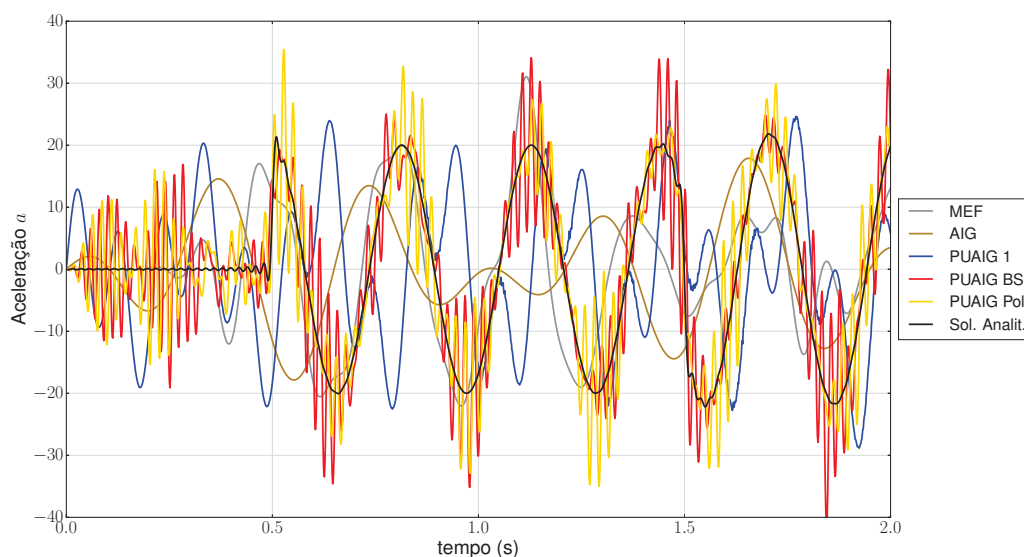


FIGURA 67 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA PARA A PRIMEIRA ITERAÇÃO

TABELA 3 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA

	AIG	MEF	MEFG <sup>1</sup>	PUAIG BS	PUAIG Pol	PUAIG 1
	20 gdl	21 gdl	21 gdl	12 gdl	12 gdl	10 gdl
u	1.17	1.2	0.0258	0.0126	0.0126	1.32
v	22.6	24.15	—	0.208	0.105	25.67
a	490	450	-	105	96	528

<sup>1</sup> Torii, Machado e Arndt (2015)

Os erros acumulados para o MEFG e para a PUAIG são muito superiores ao MEF e a AIG com uma quantidade muito próxima de graus de liberdade. Contudo a PUAIG BS e a PUAIG Pol superam o MEFG com uma quantidade reduzida de graus de liberdade, o que mostra-se um aspecto muito vantajoso. A figura 68 mostra os campos de deslocamento transformados para o domínio da frequência através da transformada de Fourier. As linhas em cinza indicam a posição dos modos de vibração natural.

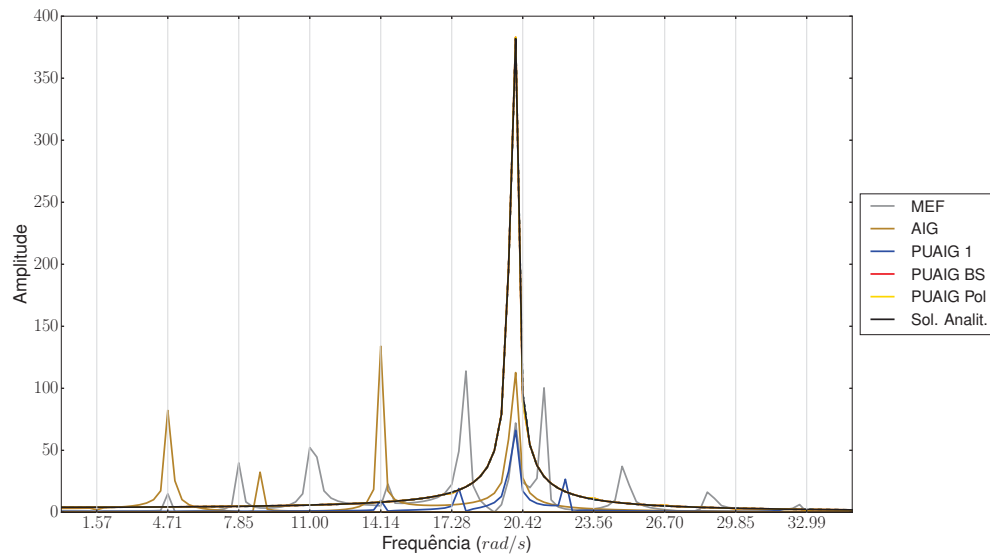


FIGURA 68 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA PARA A PRIMEIRA ITERAÇÃO

É possível notar através da figura 68 que o modo preponderante na oscilação é o mais próximo à frequência da fonte excitadora. Com base nessa informação, o processo adaptativo é executado adicionando este modo dominante no espaço de enriquecimento da PUAIG. Logo, as figuras 69, 70 e 71 mostram os campos de deslocamentos, velocidades e acelerações, com a inserção do modo preponderante neste processo adaptativo.

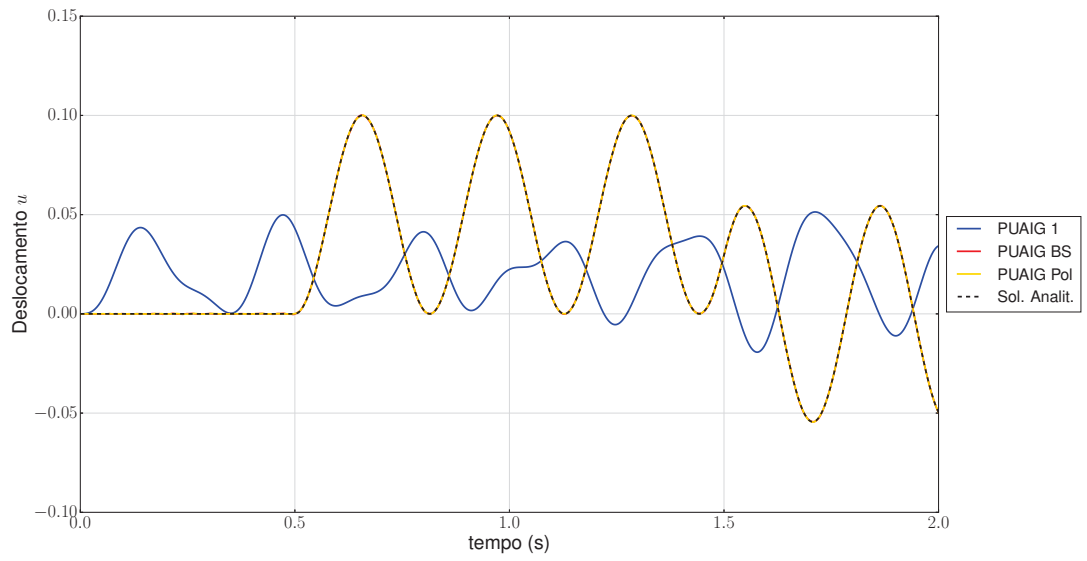


FIGURA 69 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 20 \text{ RAD/S}$  PARA O PROCESSO ADAPTATIVO

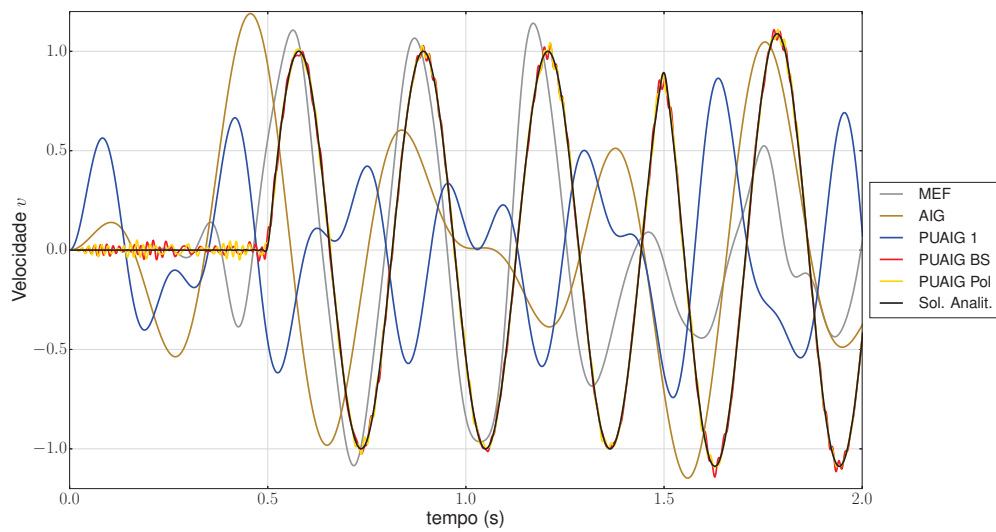


FIGURA 70 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 20 \text{ RAD/S}$  PARA O PROCESSO ADAPTATIVO

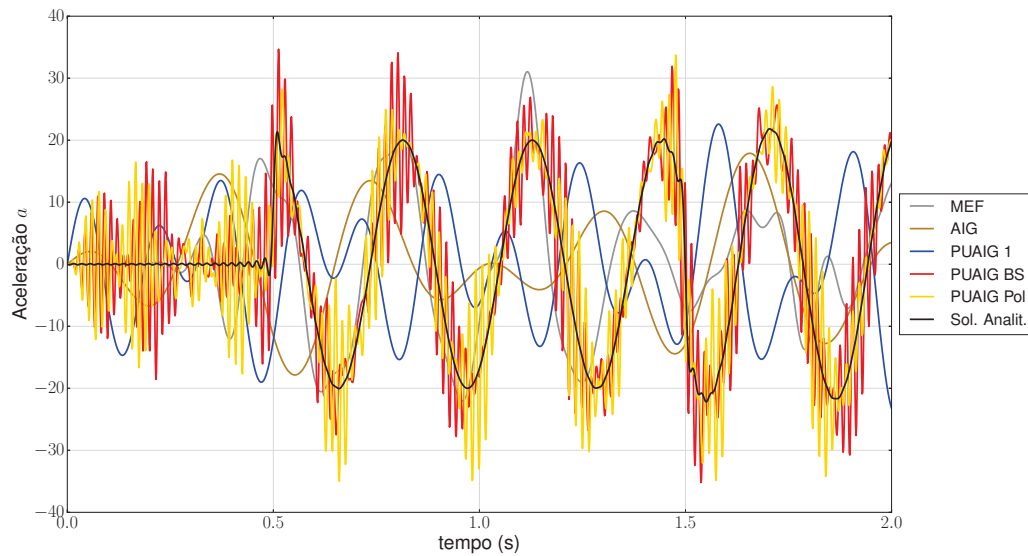


FIGURA 71 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 20 \text{ RAD/S}$  PARA O PROCESSO ADAPTATIVO

Ao inserir um nível de enriquecimento adicional correspondente ao modo dominante, os deslocamentos apresentam um ganho de precisão. A tabela 4 mostra os erros acumulados dos modelos desenvolvidos na PUAIG com o uso de adaptatividade. Nota-se que o melhor desempenho no processo adaptativo é da PUAIG Polinomial, seguido da PUAIG BS, que obtiveram ganhos consideráveis para poucos graus de liberdade. O desempenho da PUAIG 1 não foi satisfatório mesmo no processo adaptativo, não obtendo melhorias consideráveis. Ao analisar novamente o espectro da oscilação através da figura 72 é possível observar que as frequências concentram-se mais próximas do modo dominante e as amplitudes ficam mais próximas da solução analítica.

TABELA 4 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO

	PUAIG BS	PUAIG Pol	PUAIG 1
	16 gdl	16 gdl	14 gdl
u	0.0078	0.0055	1.32
v	0.055	0.053	12.67
a	87.5	52	423

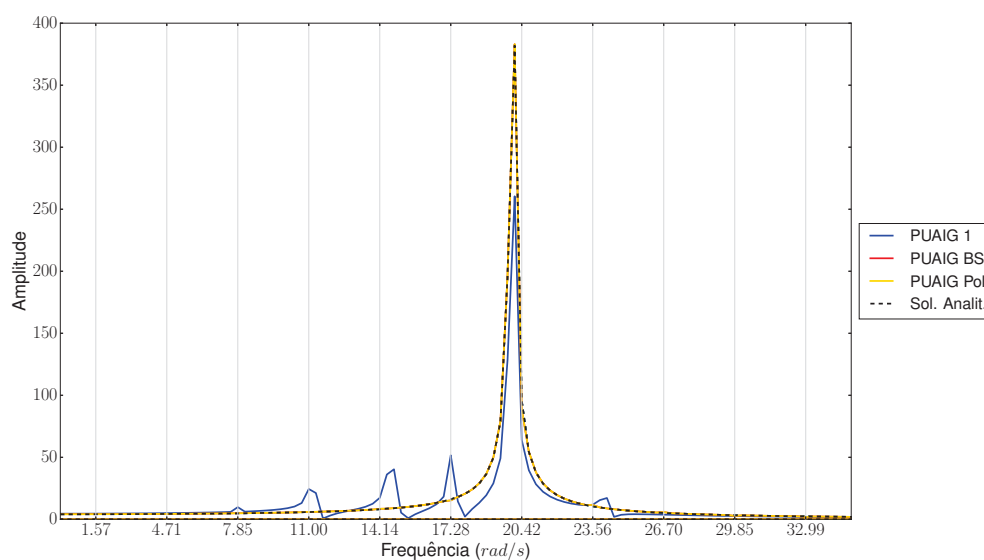


FIGURA 72 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA PARA A SEGUNDA ITERAÇÃO

### 6.3.2 Frequência Excitadora $\omega = 25.13 \text{ rad/s}$

O mesmo procedimento é repetido neste experimento apenas com a PUAIG, variando-se apenas a frequência da fonte excitadora. Esta frequência foi escolhida por estar exatamente entre o 8º e o 9º modo de vibrar, correspondentes às frequências naturais  $23,56 \text{ rad/s}$  e  $26,7 \text{ rad/s}$ , a fim de observar quais modos são excitados por uma frequência o mais distante possível entre eles. As propriedades da barra e dos espaços de aproximação são mantidas. As figuras 73, 74 e 75 mostram respectivamente

os campos de deslocamento, velocidades e acelerações.

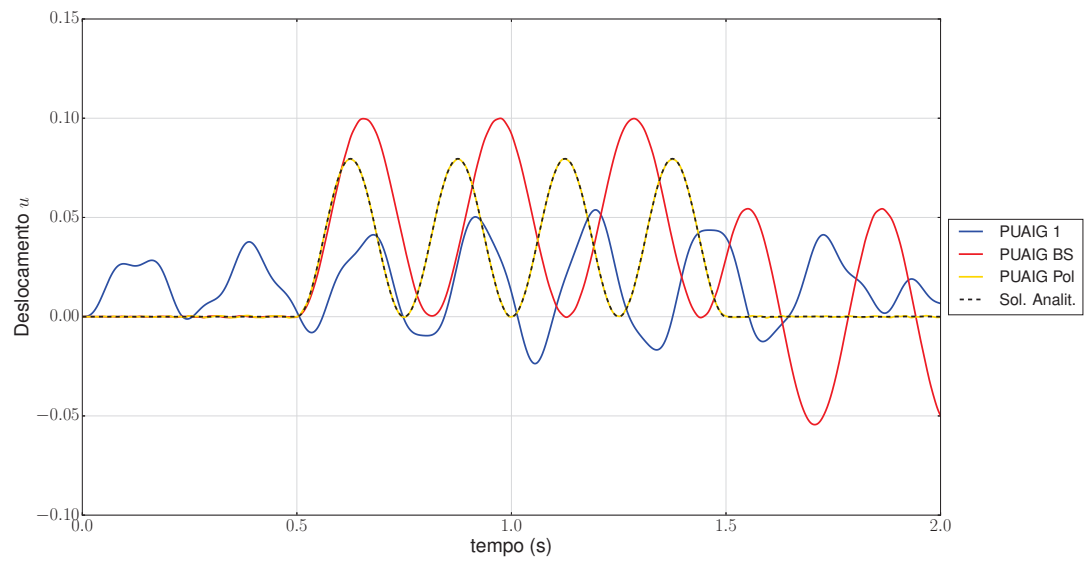


FIGURA 73 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 25.13 \text{ RAD/S}$

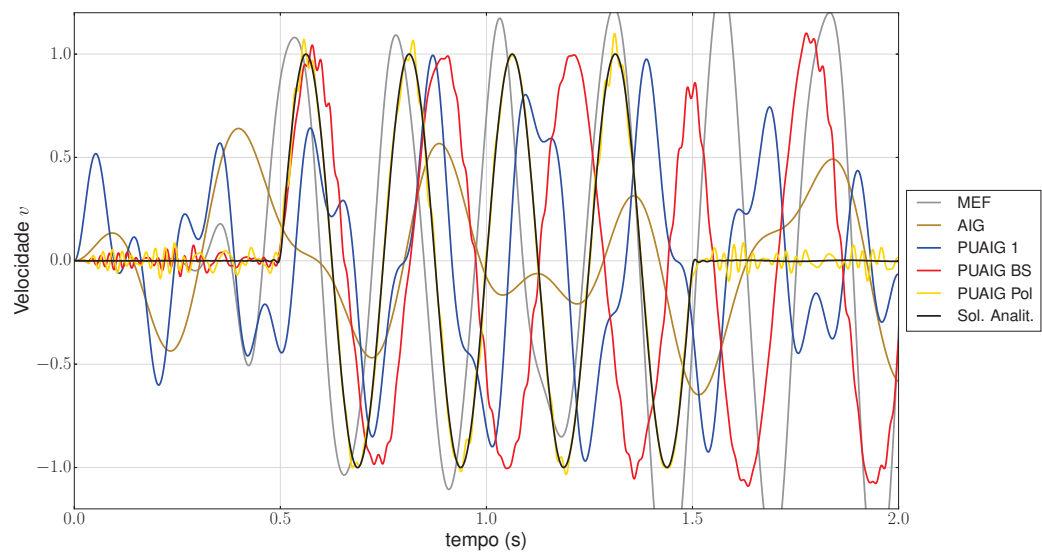


FIGURA 74 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 25.13 \text{ RAD/S}$

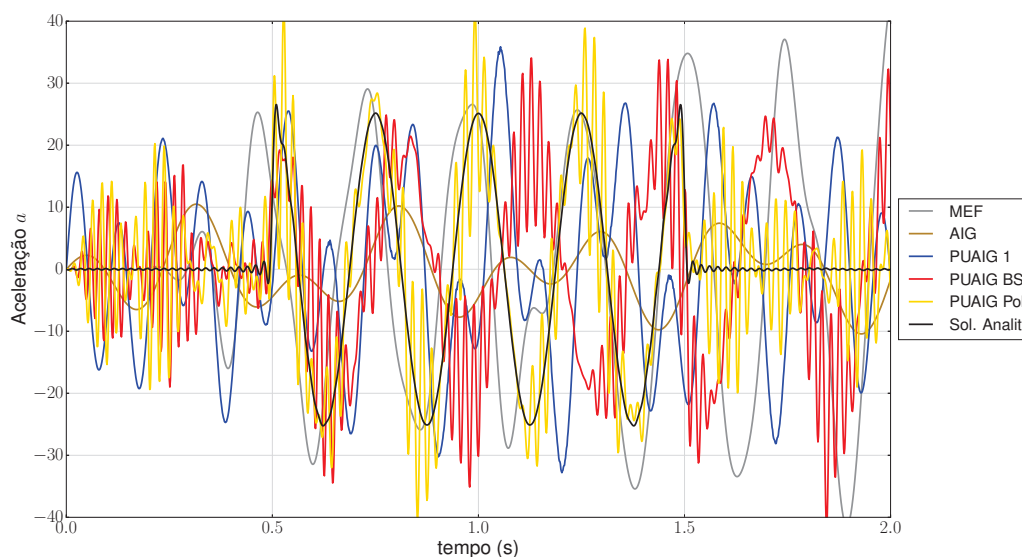


FIGURA 75 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 25.13 \text{ RAD/S}$

Neste experimento é possível observar graficamente que a PUAIG Polinomial aproxima-se muito bem da solução analítica no campo de deslocamentos e velocidades. A tabela

TABELA 5 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO

	PUAIG BS	PUAIG Pol	PUAIG 1
	12 gdl	12 gdl	10 gdl
u	2.63	0.022	2.75
v	43.7	0.33	57.6
a	10018	237.8	8457

A tabela 5 mostra um prévio aspecto vantajoso da PUAIG Polinomial sobre as demais formulações, mesmo que o campo de acelerações e velocidades mostrasse com erros mais elevados. Os erros da PUAIG BS e PUAIG 1 são similares com pequenas vantagens da PUAIG BS. O espectro da oscilação, mostrado através da figura 76 aponta que os modos dominantes do sistema são os modos 1 e 2, além dos

dois modos vizinhos da frequência de excitação, ou seja, o 8° e o 9° modo.

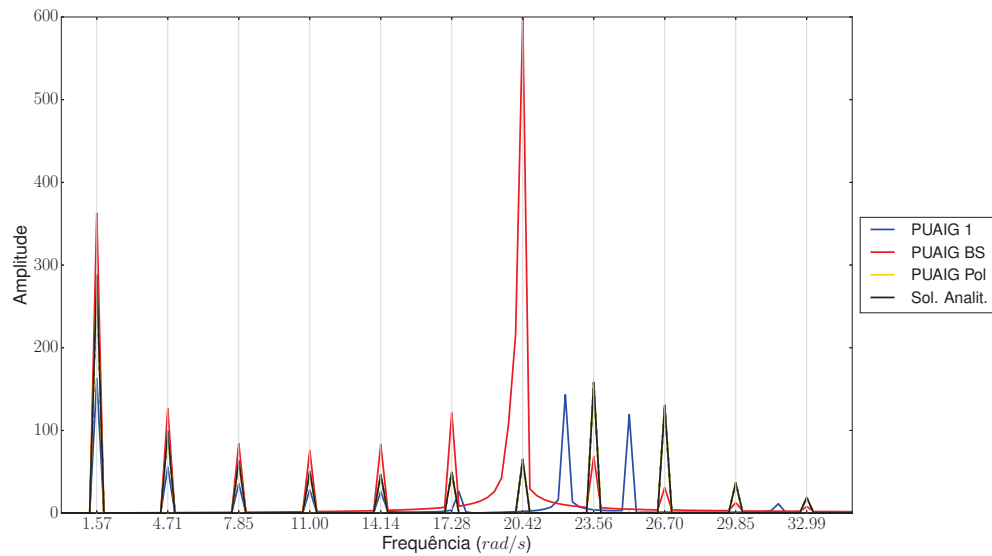


FIGURA 76 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 25.13 \text{ RAD/S}$  PARA O PROCESSO ADAPTATIVO

Efetua-se, portanto uma nova análise considerando os enriquecimentos com os 4 modos selecionados anteriormente, cujos resultados em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações são mostrados nas figuras 77, 78 e 79.

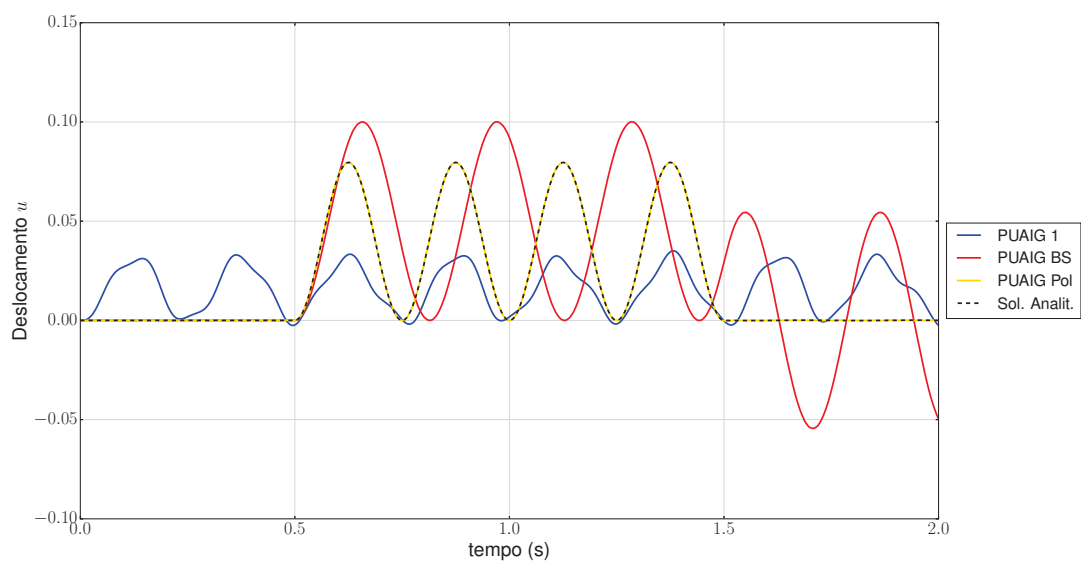


FIGURA 77 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 25.13 \text{ RAD/S}$  PARA O PROCESSO ADAPTATIVO



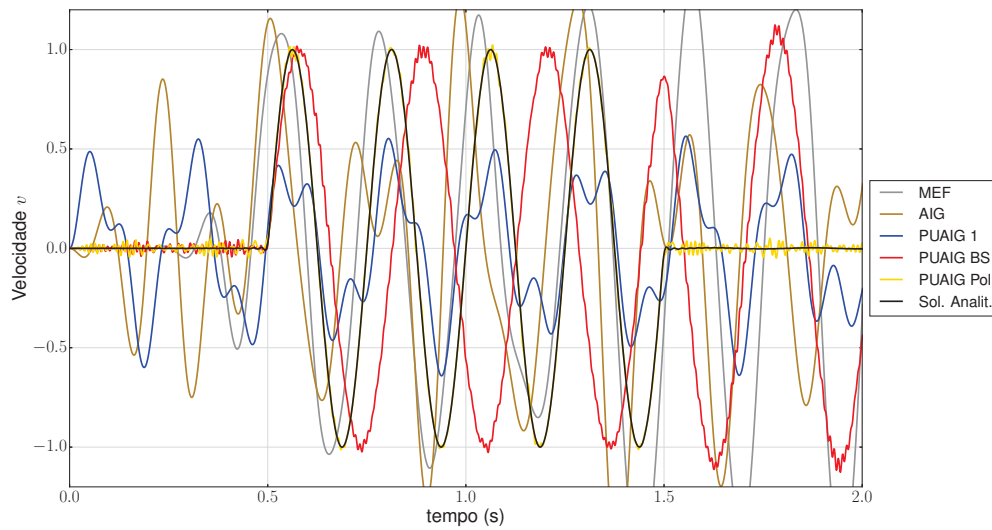


FIGURA 78 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 25.13 \text{ RAD/S}$  PARA O PROCESSO ADAPTATIVO

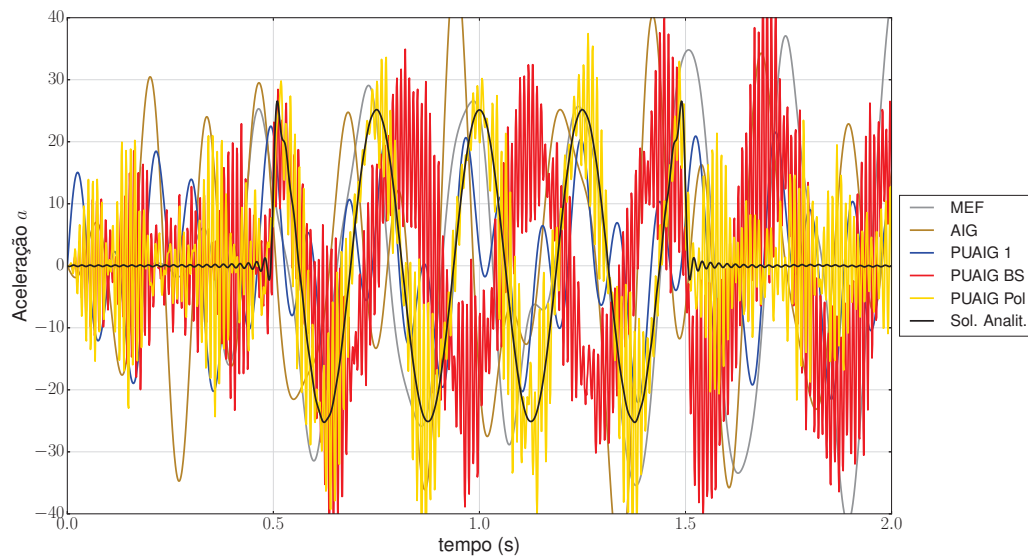


FIGURA 79 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 25.13 \text{ RAD/S}$  PARA O PROCESSO ADAPTATIVO

A tabela 6 mostra os erros acumulados dos deslocamentos, acelerações e velocidades. A PUAIG Polinomial novamente apresenta um desempenho notavelmente superior às demais formulações para os problemas de oscilação forçada. A figura 80 mostra o espectro da oscilação, onde os modos dominantes ficam mais próximos dos modos analíticos, especialmente na PUAIG com PU Polinomial.

TABELA 6 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO

	PUAIG BS	PUAIG Pol	PUAIG 1
	12 gdl	12 gdl	10 gdl
u	1.27	0.0065	0.41
v	26.84	0.37	6.48
a	3109	131.76	201.35

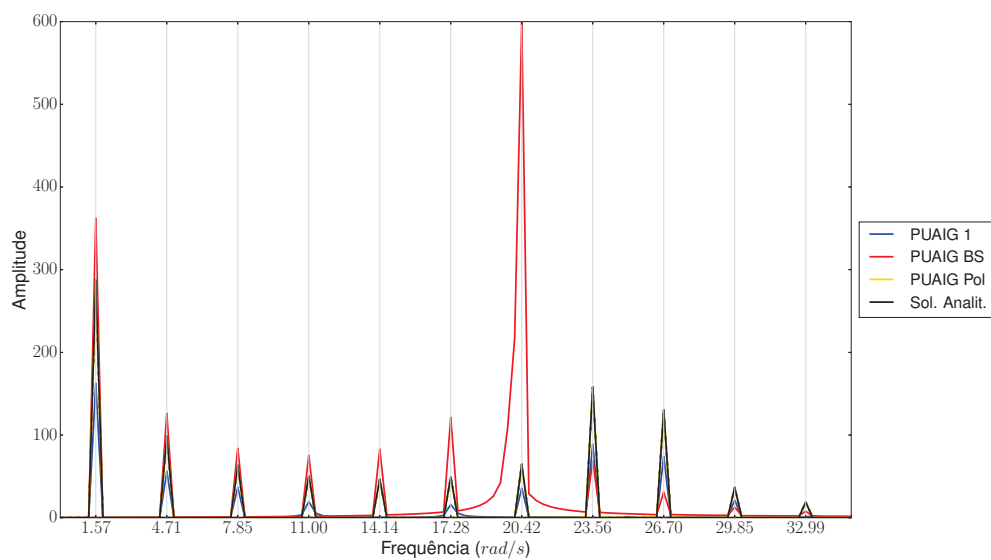


FIGURA 80 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA, COM  $\omega = 25.13 \text{ RAD/S}$  PARA O PROCESSO ADAPTATIVO

#### 6.4 EXEMPLO 4 - VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

A viga simplesmente apoiada, ilustrada através da figura 81, possui solução analítica para as frequências naturais de vibração dadas por (CHOPRA, 1995; PETYT, 2010):

$$\omega_i = \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}. \quad (191)$$

Os parâmetros de material e dimensões utilizadas neste experimento são  $E = 1N/m^2$ ,  $\rho = 1kg/m^3$ ,  $L = 1m$ ,  $I = 1m^4$ .

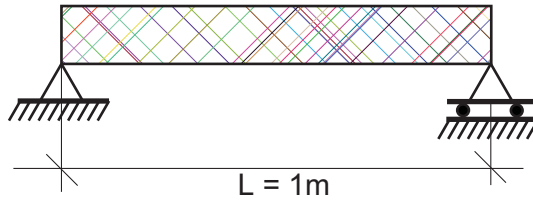


FIGURA 81 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

#### 6.4.1 Níveis de Enriquecimento

Com relação ao aumento no número de níveis de enriquecimento, a presente formulação da PUAIG consiste em utilizar funções do tipo Arndt com PU B-Splines, onde os parâmetros de enriquecimento são  $B_j = j\pi$ . Os resultados são mostrados nas figuras 82 - 87 para a PUAIG em comparação com os resultados obtidos por (ARNDT, 2009) para o MEFG utilizando as funções trigonométricas do MMA (MEFG MMA) e do CEM (MEFG Trig).

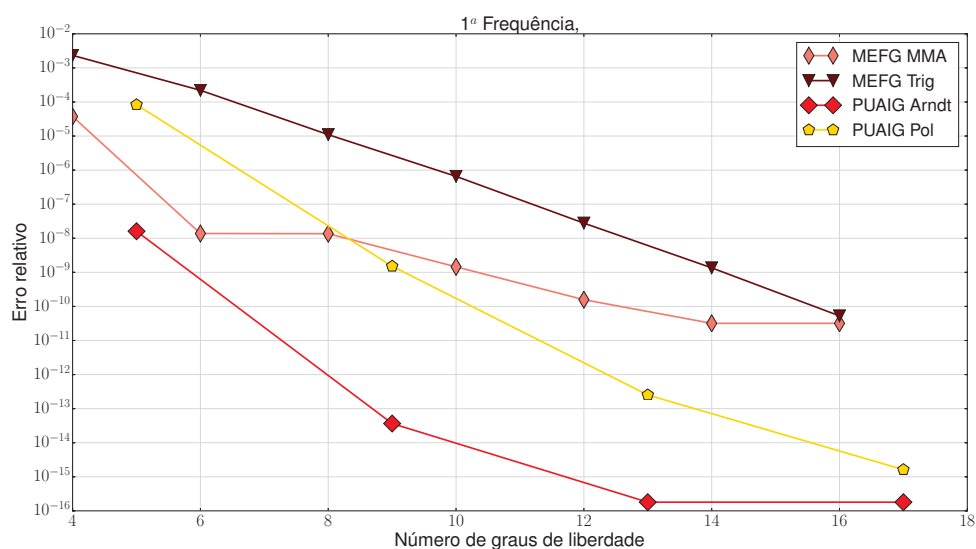


FIGURA 82 – ERRO RELATIVO DA 1ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

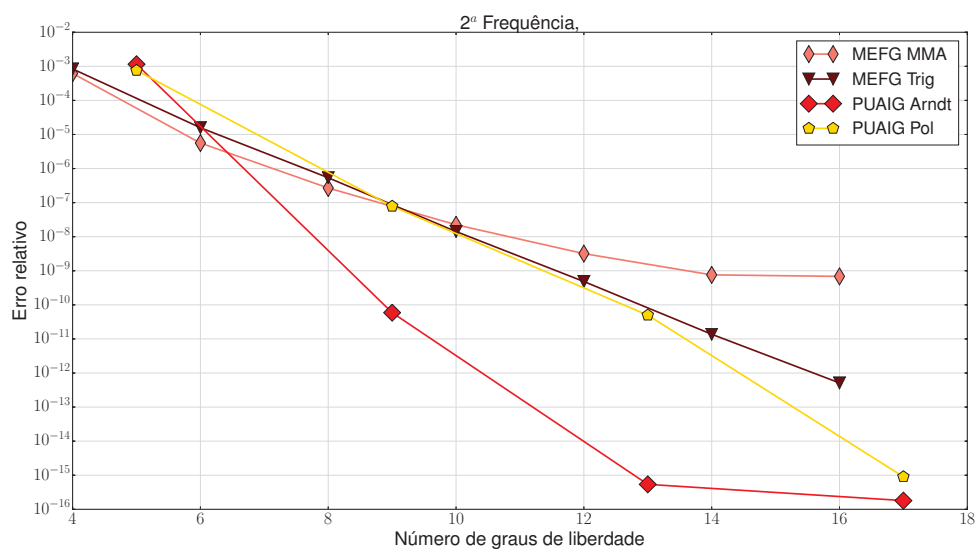


FIGURA 83 – ERRO RELATIVO DA 2ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

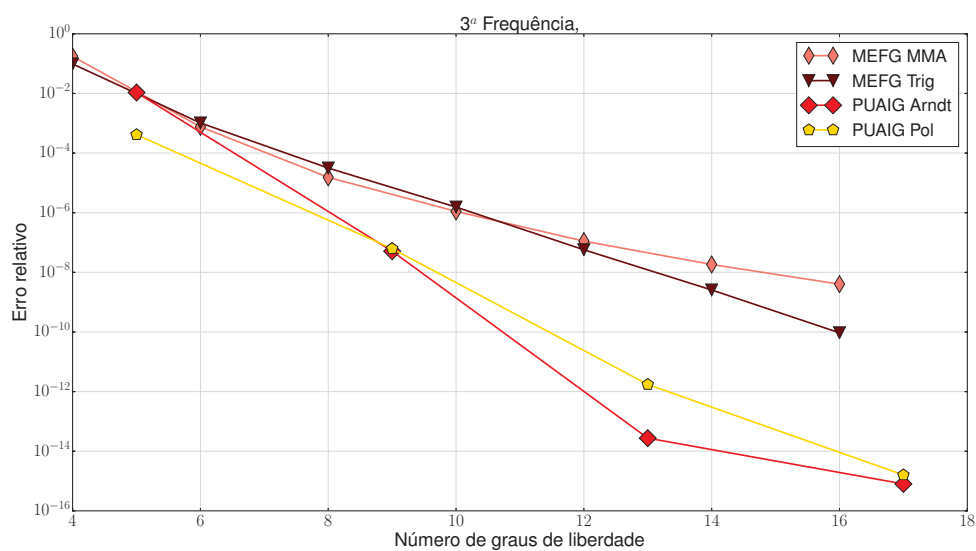


FIGURA 84 – ERRO RELATIVO DA 3ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

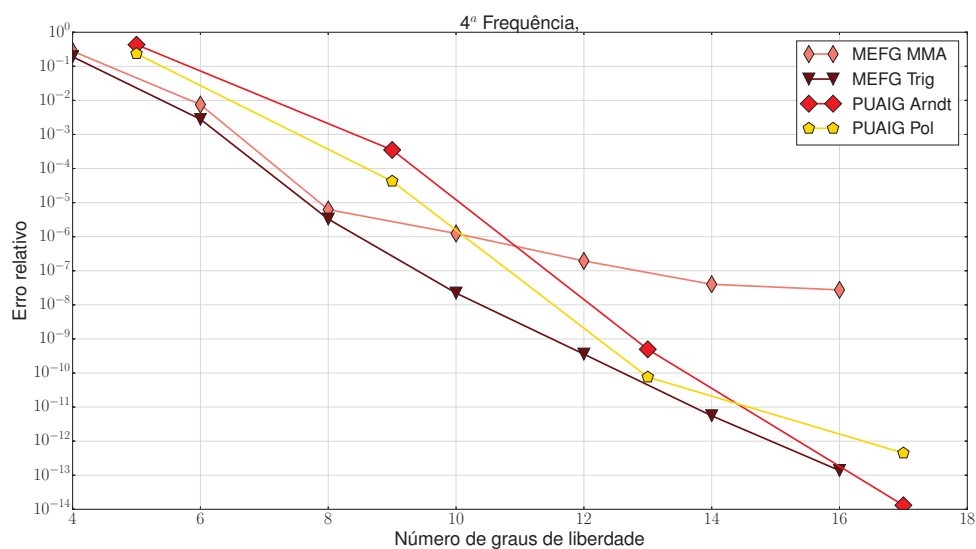


FIGURA 85 – ERRO RELATIVO DA 4ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

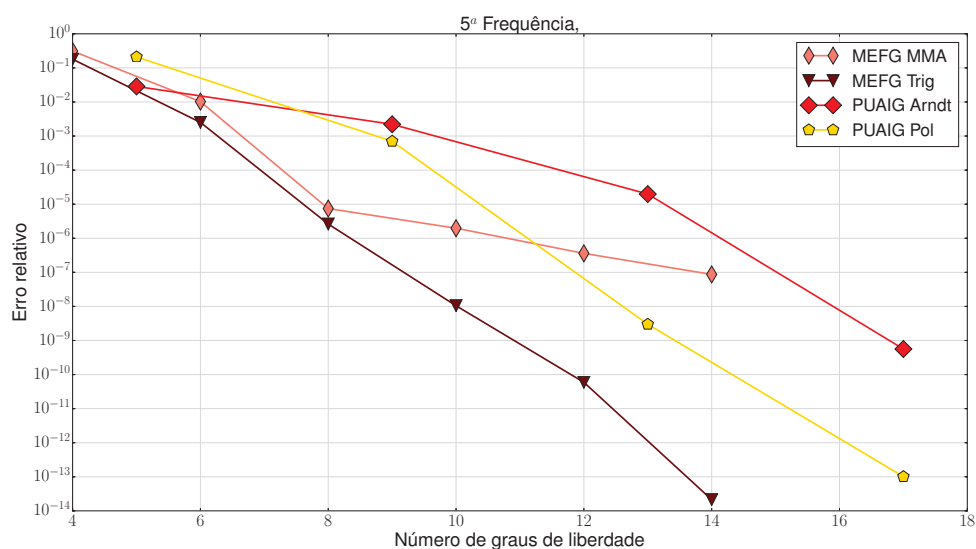


FIGURA 86 – ERRO RELATIVO DA 5<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

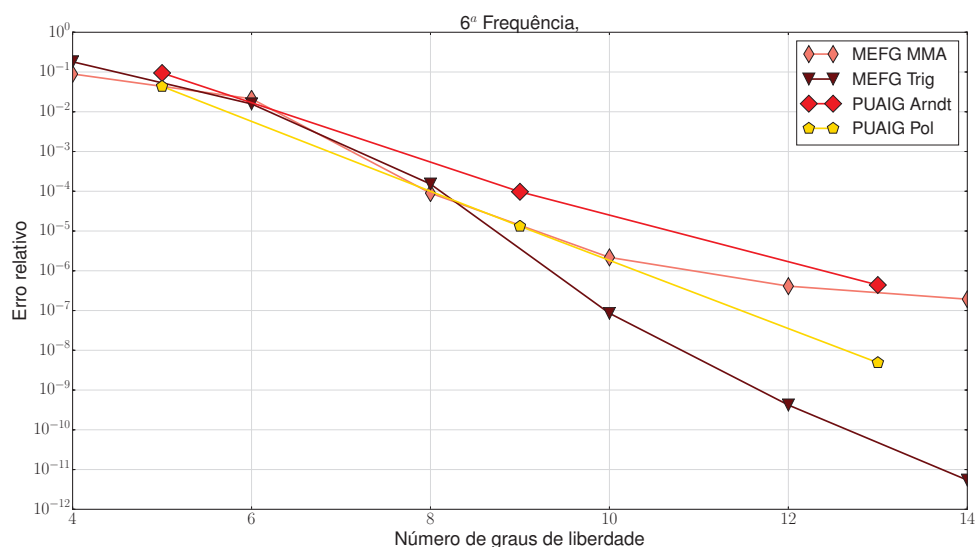


FIGURA 87 – ERRO RELATIVO DA 6<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

Observam-se taxas de convergência vantajosas para a PUAIG nas primeiras frequências, mesmo considerando que todos os métodos levaram rapidamente para valores muito precisos. Para as frequências mais altas o MEFG Trig. se destaca com melhores taxas de convergência, contudo é possível observar elevada acurácia para a PUAIG nos modos mais altos. As figuras 88 e 89 mostram os números de condição

da matriz massa e rigidez, onde os condicionamentos crescem substancialmente em função do aumento do número de níveis, ultrapassando a casa de  $10^{16}$  a partir do terceiro nível. No caso da viga os números de condição da matriz de rigidez são maiores do que os da matriz de massa, ao contrário dos problemas de barra. Os experimentos com a PUAIG para a viga são desenvolvidos com a utilização de 32 casas decimais.

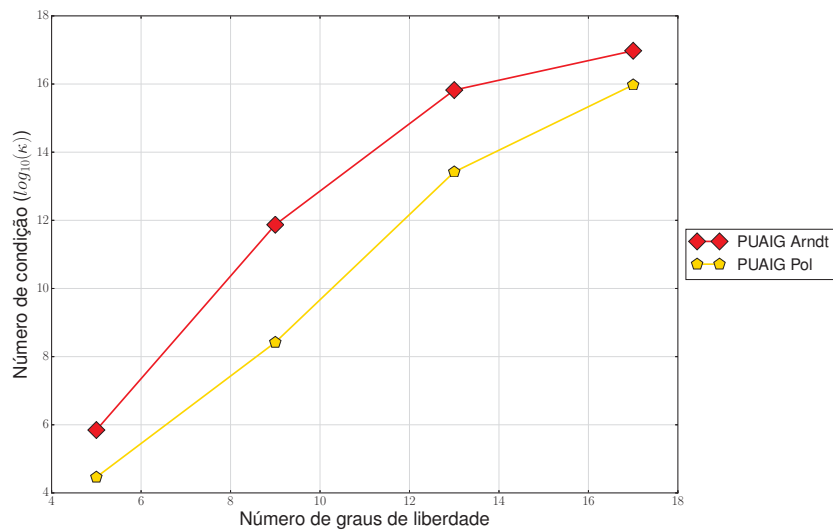


FIGURA 88 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

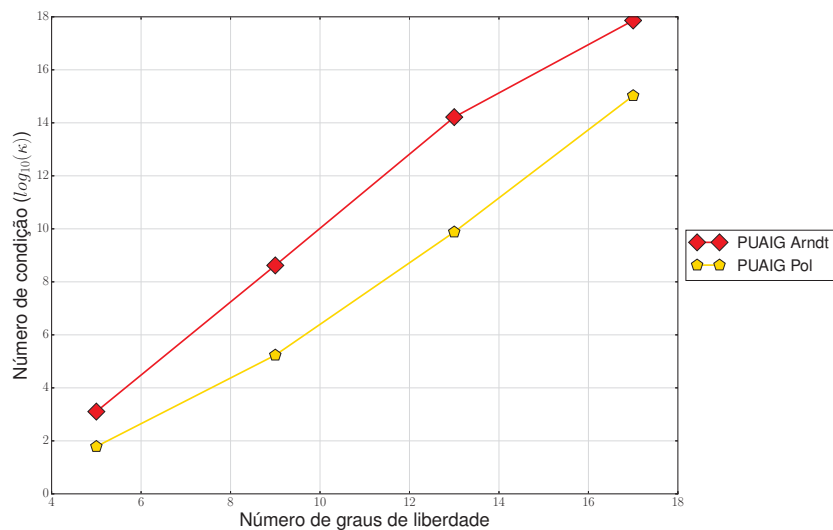


FIGURA 89 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA VIGA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

## 6.5 EXEMPLO 5 - VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SUBMETIDA A CARREGAMENTO CONSTANTE

A viga apoiada submetida a carregamento constante é ilustrada na figura 90. Neste exemplo uma força constante  $f(t) = f$  é aplicada no meio do vão durante todo o tempo de análise. A solução analítica deste problema é desenvolvida por Chopra (1995), dada por:

$$u\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{2fL^3}{\pi^4 EI} \left( \frac{1 - \cos(\omega_1 t)}{1^4} + \frac{1 - \cos(\omega_3 t)}{3^4} + \frac{1 - \cos(\omega_5 t)}{5^4} + \dots \right), \quad (192)$$

$$\dot{u}\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{2fL^3}{\pi^4 EI} \left( \frac{\omega_1 \sin(\omega_1 t)}{1^4} + \frac{\omega_3 \sin(\omega_3 t)}{3^4} + \frac{\omega_5 \sin(\omega_5 t)}{5^4} + \dots \right), \quad (193)$$

$$\ddot{u}\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{2fL^3}{\pi^4 EI} \left( \frac{\omega_1^2 \cos(\omega_1 t)}{1^4} + \frac{\omega_3^2 \cos(\omega_3 t)}{3^4} + \frac{\omega_5^2 \cos(\omega_5 t)}{5^4} + \dots \right), \quad (194)$$

onde  $\omega_1, \omega_3, \dots$  são as frequências naturais da viga bi apoiada, dada pela equação 191.

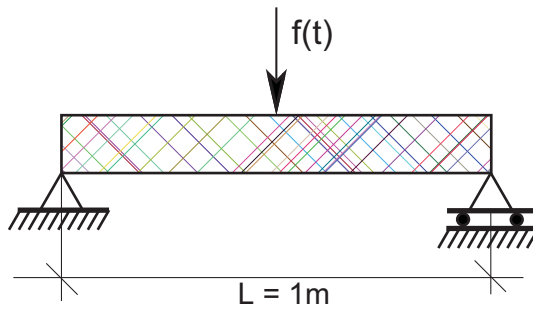


FIGURA 90 – VIGA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO CONSTANTE

Para este experimento são utilizados os parâmetros  $L = 1m$ ,  $E = 1kN/m^2$ ,  $\rho =$



$1kg/m^3$ ,  $I = 1m^4$  e  $A = 1m^2$ . É utilizado o Método de Newmark com aceleração linear, para tempo total  $t = 20s$  e passo no tempo  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}s$ . O MEF é desenvolvido com elementos cúbicos de Hermite e 4 elementos. A AIG utiliza grau polinomial  $p = 2$  e 8 funções B-Splines. A PUAIG é testada com um único elemento, grau polinomial  $p = 2$  e um nível de enriquecimento com parâmetro  $\beta_1 = \pi$ . As figuras 91, 92 e 93 mostram os deslocamentos, velocidades e acelerações no intervalo de  $t = 2s$  no ponto central.

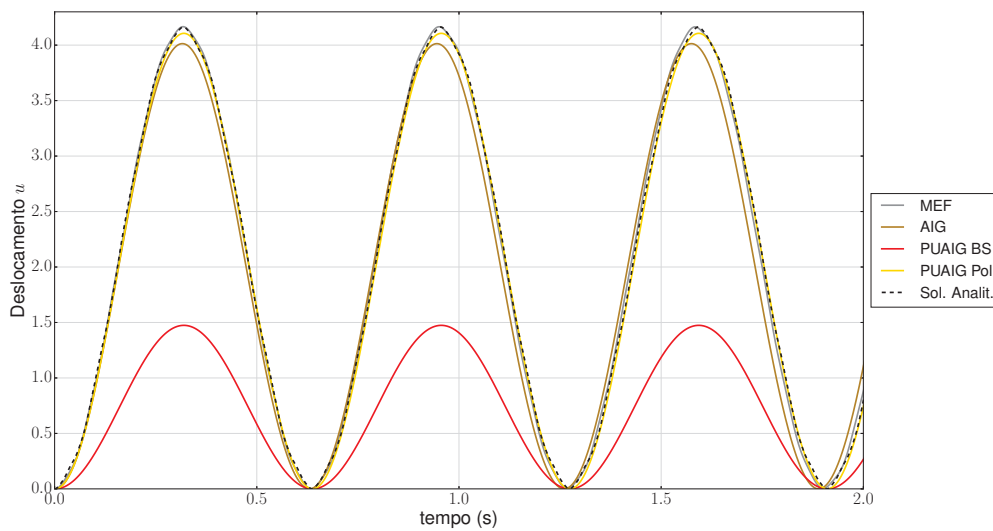


FIGURA 91 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE

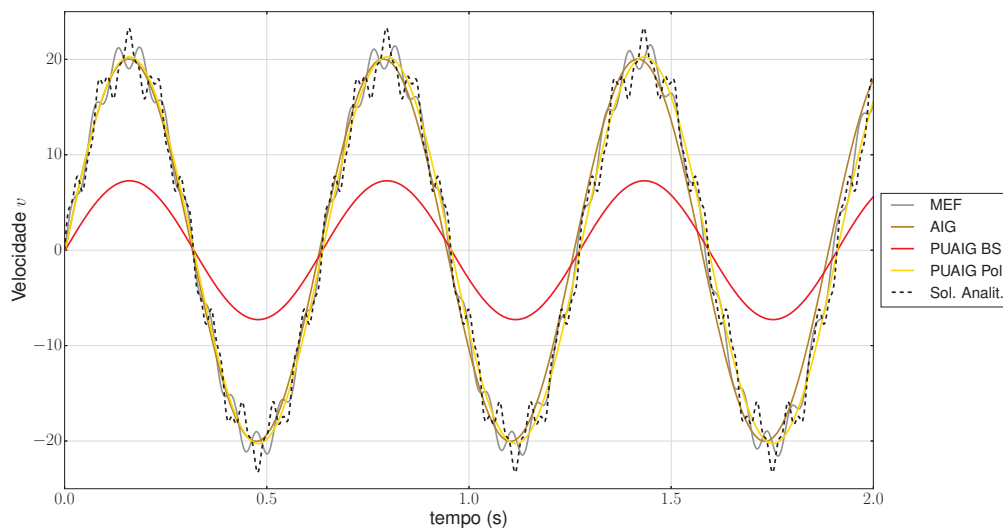


FIGURA 92 – VELOCIDADES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE

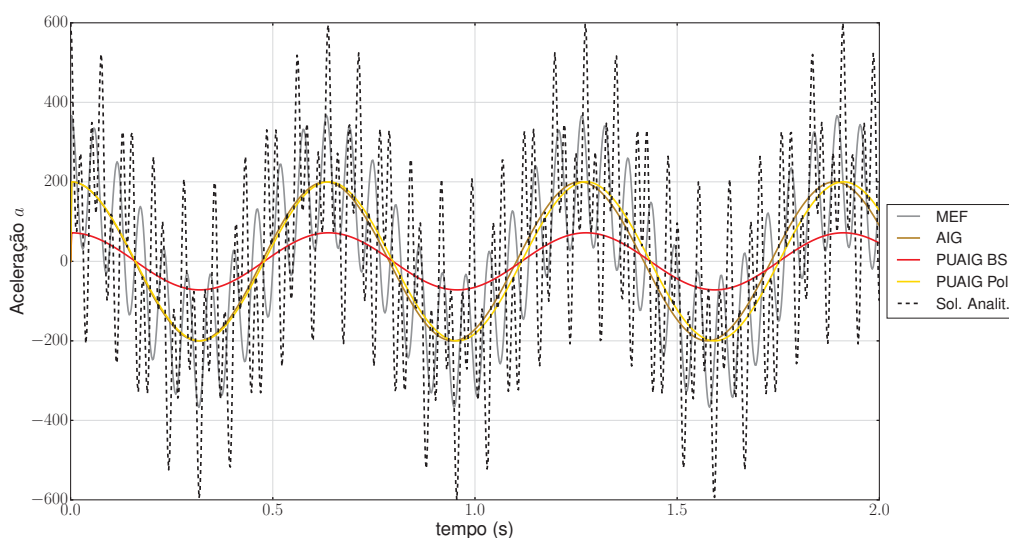


FIGURA 93 – ACELERAÇÕES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE

A figura 91 mostra que praticamente todas as soluções ficam próximas da solução analítica para os deslocamentos, com exceção da PUAIG BS que apresenta uma defasagem na sua amplitude. O modelo de PUAIG Polinomial e o MEF ficaram os mais próximos da solução analítica e a AIG começa de apresentar uma gradativa diferença de fase a partir do segundo ciclo. A tabela 7 mostra os erros acumulados para os campos de deslocamentos, acelerações e velocidades, em comparação com os erros acumulados obtidos por Debella (2018) para o MEFG, com 4 elementos e 1 nível de enriquecimento.

TABELA 7 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA

	AIG 7 gdl	MEF 7 gdl	MEFG <sup>1</sup> 16 gdl	PUAIG BS 6 gdl	PUAIG Pol 6 gdl
u	9.7	25.98	0.0003	26.8	0.7
v	260	102	—	169.7	29.6
a	4159	3898	—	3623	3243

<sup>1</sup> Debella (2018)

A tabela 7 mostra um desempenho superior da PUAIG Polinomial em relação

às demais formulações testadas, contudo os resultados obtidos por Debella (2018) para o MEFG são consideravelmente superiores em termos de deslocamentos. O campo de velocidades com a PUAIG Polinomial mostra-se muito mais comportado do que as demais formulações e as acelerações aparecem muito defasadas em todos os casos, sendo que ainda a PUAIG Polinomial obteve os menores erros. A figura 94 mostra os espectros da oscilação, apontando o que apenas o primeiro modo é dominante neste problema, o que também é apontado por Debella (2018). Desta forma executa-se uma nova análise com a PUAIG modificando o parâmetro para  $\beta_1 = \pi^2$ , correspondente à frequência analítica do primeiro modo da viga. As figuras 95, 96 e 97 mostram os deslocamentos, velocidades e acelerações deste modelo adaptativo.

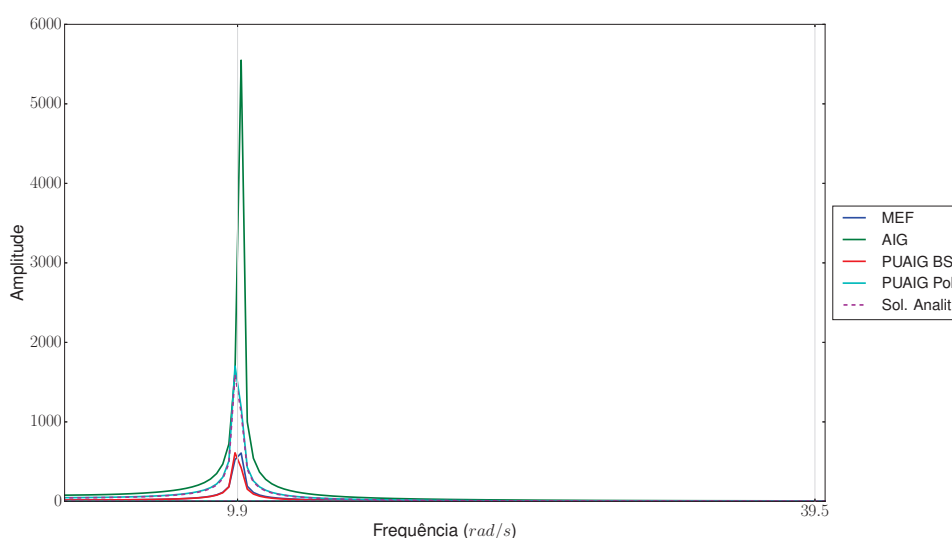


FIGURA 94 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE

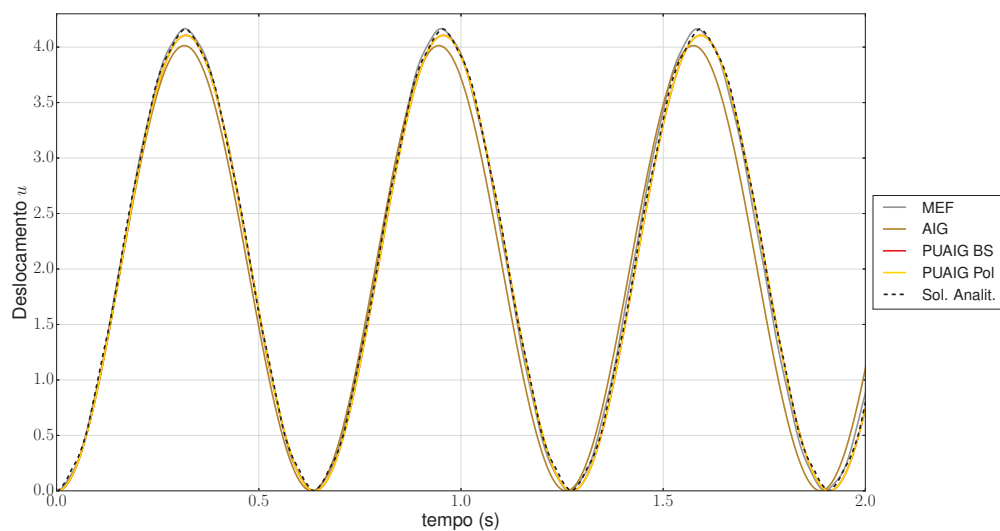


FIGURA 95 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A PUAIG ADAPTATIVA

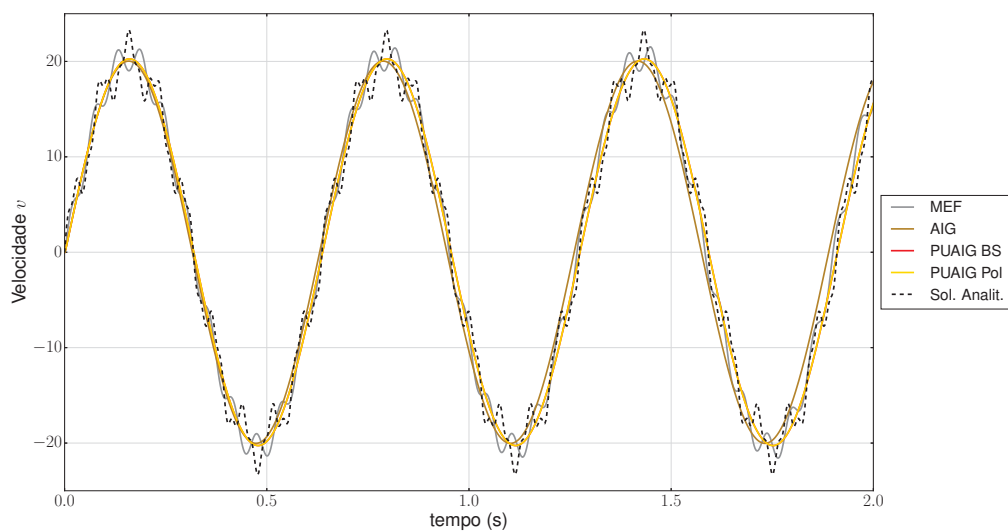


FIGURA 96 – VELOCIDADES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A PUAIG ADAPTATIVA

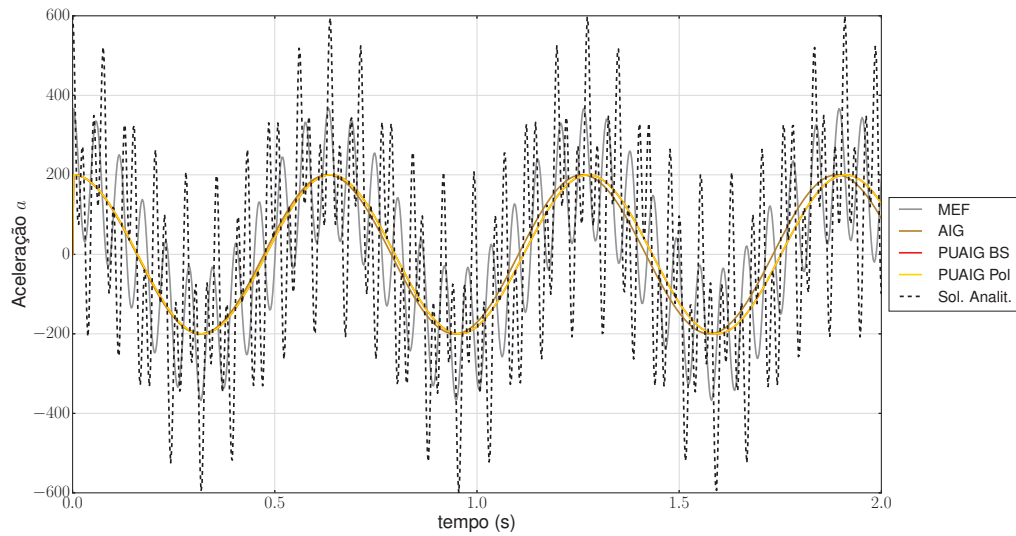


FIGURA 97 – ACELERAÇÕES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A PUAIG ADAPTATIVA

Ao inserir o parâmetro  $\beta_1 = \pi^2$  as formas da PUAIG caracterizam-se por um ganho de precisão, além da amplitude da PUAIG BS se adequar melhor à solução. Os gráficos da PUAIG Polinomial e BS praticamente coincidem, obtendo pequenas variações no campo de acelerações. A tabela 8 mostra os erros acumulados, apontando para ganhos mais substanciais na PUAIG BS em função da adequação de amplitude. O deslocamento da PUAIG Polinomial obteve um pequeno aprimoramento, mesmo que os resultados do MEFG sejam mais vantajosos para os deslocamentos do que os da PUAIG.

TABELA 8 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO

	PUAIG BS	PUAIG Pol
	6 gdl	6 gdl
u	0.6	0.54
v	15.3	14.4
a	3223	3105

## 7 PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

### 7.1 EXEMPLO 6 - CHAPA RETANGULAR FINA

Para o Estado Plano de Tensões com a PUAIG, é considerado o exemplo da vibração livre de uma chapa fina retangular, fixa em uma extremidade, conforme mostra a figura 98, cujas vibrações se dão no plano. Considera-se parâmetros geométricos  $L_x = L_y = 1m$ ,  $E = 210GPa$ ,  $\rho = 8000kg/m^3$ , espessura  $h = 0.05m$ ,  $\nu = 0.3$ .

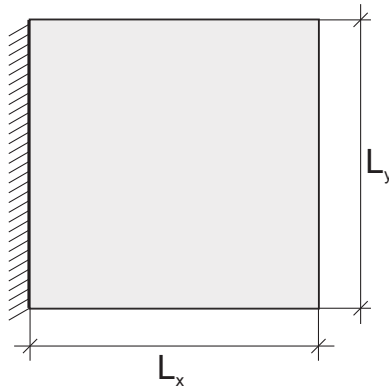


FIGURA 98 – CHAPA RETANGULAR FINA FIXA EM UMA EXTREMIDADE

Neste modelo a PUAIG é testada parâmetros  $\beta_1 = \pi$ , grau polinomial  $p = 2$  e 1 elemento. Os resultados são apresentados em forma de espectros de erro relativo, e comparados com a AIG pura, com os mesmos parâmetros polinomiais da PUAIG e com os resultados do MEFG obtidos por Torii (2012), que utilizou malha com  $2 \times 2$  elementos. A figura 99 mostra os erros relativos para as 20 primeiras frequências naturais obtidas com a AIG e a PUAIG. Os erros relativos são calculados com o resultado de referência utilizado por Torii (2012) para o MEF Hierárquico com grau polinomial  $p = 9$  e 16 elementos.

No caso dos enriquecimentos com parâmetro  $\beta_1 = \pi$ , mostrado pela figura 99, é possível observar um comportamento preciso de todos os métodos até o sexto

modo, onde começam a obter comportamentos menos precisos, com exceção do MEFG que mantém-se muito estável em todo o espectro. A PUAIG apresenta erro máximo na casa 8‰ e com resultados mais precisos que a AIG pura.

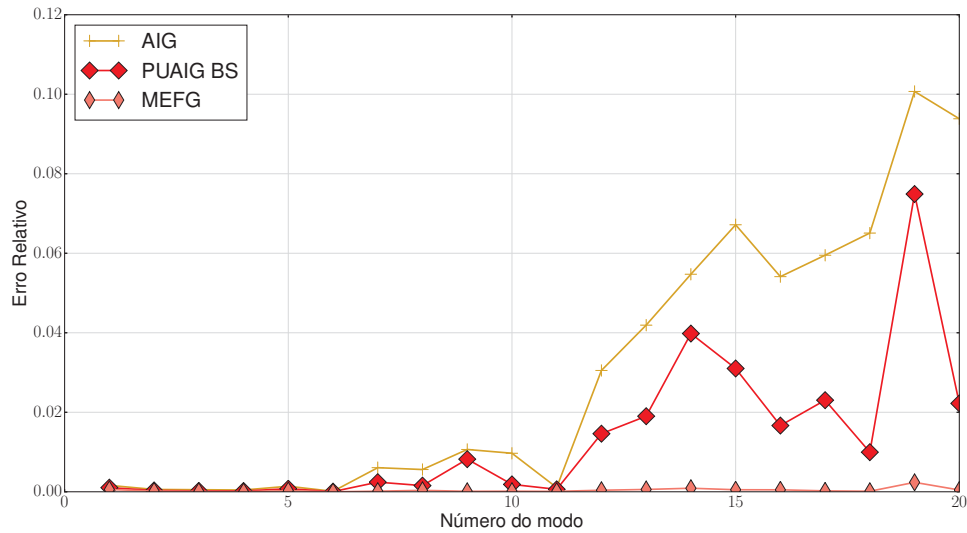


FIGURA 99 – ERROS RELATIVOS PARA AS 20 PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DA CHAPA FINA COM ENRIQUECIMENTO  $\beta_1 = \pi$

## 7.2 EXEMPLO 7 - CHAPA RETANGULAR COM CARREGAMENTO DE IMPACTO

Para testar a PUAIG com problemas de vibração forçada no estado plano de tensões, uma chapa fina quadrada com  $L_x = L_y = 2m$  e engastada na borda esquerda é submetida a um carregamento de impacto na metade da extremidade livre, conforme mostra a figura 100. Os parâmetros de material são  $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$ ,  $\rho = 8000 kg/m^3$ ,  $h = 0.01m$  e  $\nu = 0.3$ . Este exemplo não possui uma solução analítica conhecida, portanto uma solução de referência utilizando o MEF com funções hierárquicas de grau 9 e malha  $4 \times 4$  elementos foi modelada por Torii (2012) e a mesma referência é utilizada neste trabalho. Para obtenção dos deslocamentos é utilizado o Método de Newmark com tempo total de  $t = 0.005s$  e passo no tempo de  $\Delta t = 5 \times 10^{-7}s$ . A duração da força de impacto é de  $2 \times 10^{-4}s$ .

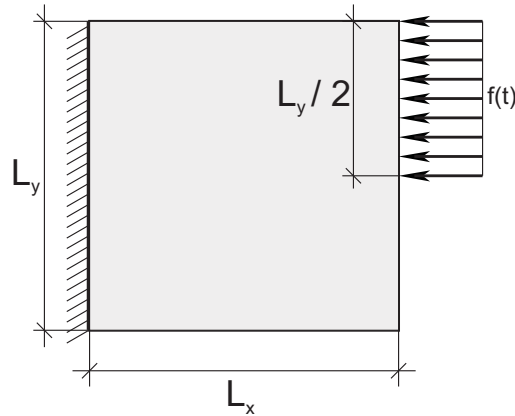


FIGURA 100 – CHAPA RETANGULAR SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE IMPACTO

A PUAIG é modelada com  $2 \times 2$  elementos do tipo  $C^0$  com grau  $p = 2$  e inicialmente 1 nível de enriquecimento  $\beta_1 = \pi$  é utilizado na análise. A AIG pura utiliza  $4 \times 4$  elementos com continuidade  $C^1$  no interior domínio e grau polinomial  $p = 2$ . Os deslocamentos encontrados no centro da chapa em comparação com a solução de referência são mostrados na figura 101.

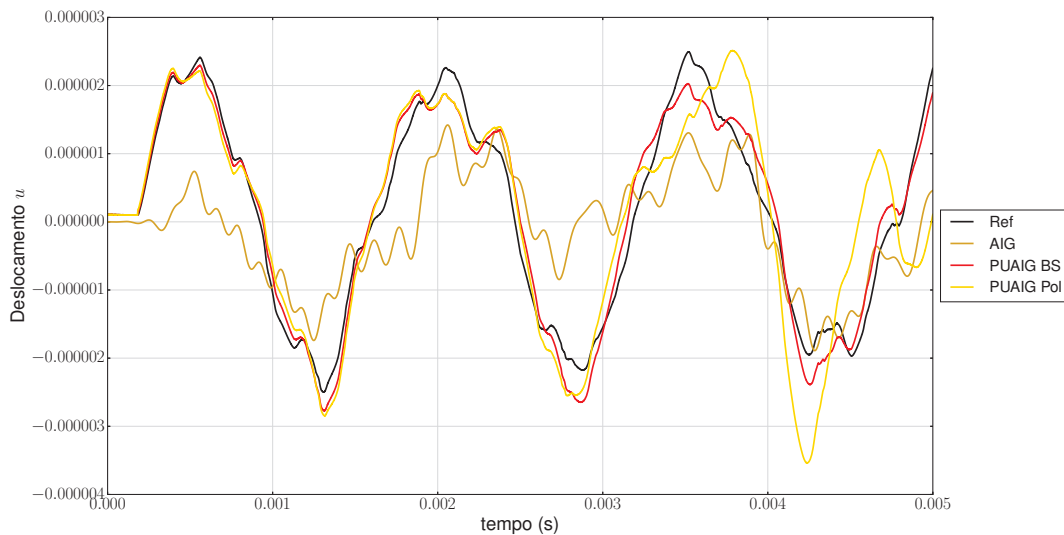


FIGURA 101 – DESLOCAMENTOS DA PLACA FINA SUBMETIDA A CARGA DE IMPACTO

A figura 101 mostra uma boa adequação da PUAIG à solução de referência no início da oscilação, e ao decorrer do tempo o desvio da solução de referência é aumentado. Dentre os métodos testados, a PUAIG BS é capaz de manter-se mais próxima da solução analítica do que a AIG e PUAIG Pol. A tabela 9 mostra os erros



acumulados da PUAIG e da AIG, em comparação com o MEFG desenvolvido por Torii (2012), que utilizou malha com  $2 \times 2$  elementos e um nível de enriquecimento com  $\beta = 2\pi$ .

TABELA 9 – ERRO ACUMULADO PARA A CHAPA FINA SUBMETIDA A FORÇA DE IMPACTO

	AIG	MEFG <sup>1</sup>	PUAIG BS	PUAIG Pol
	60 gdl	146 gdl	168 gdl	168 gdl
$u$	$6.65 \times 10^{-3}$	$5.28 \times 10^{-4}$	$1.38 \times 10^{-4}$	$2.99 \times 10^{-4}$

<sup>1</sup> Torii (2012)

A tabela 9 mostra erros mais baixos para a PUAIG BS, Polinomial e o MEFG, onde se sobressai a PUAIG BS com os resultados mais bem comportados. O espectro da oscilação é mostrado na figura 102 onde a amplitude dominante mostra estar mais próxima do segundo modo de vibrar. Desta maneira a análise da PUAIG é repetida com a modificação do parâmetro  $\beta_1 = 2\pi$ , a fim de enriquecer o modelo com o segundo modo de vibrar. A figura mostra os deslocamentos com a PUAIG adaptativa para este problema.

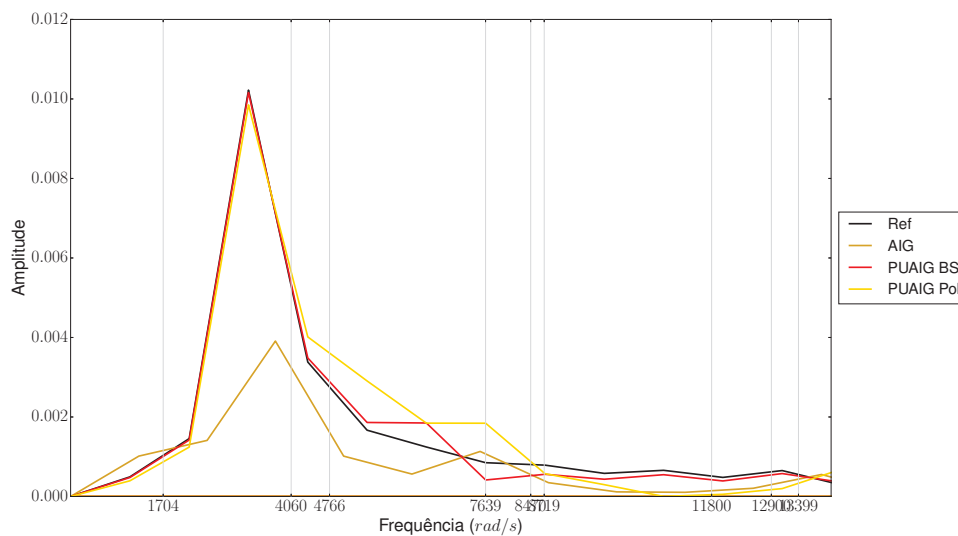


FIGURA 102 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES PARA A CHAPA FINA SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE IMPACTO

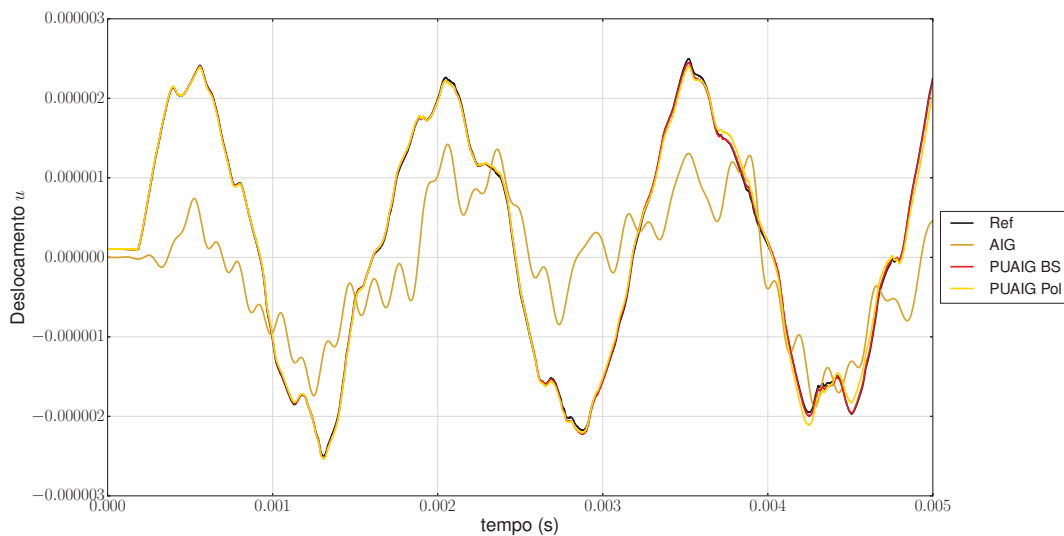


FIGURA 103 – DESLOCAMENTOS DA PLACA FINA SUBMETIDA A CARGA DE IMPACTO

Os resultados mostram uma melhor adequação da PUAIG sob a solução de referência, com menores perdas de precisão na região final da oscilação. Logo os erros da PUAIG são atualizados e mostrados na tabela 10, indicando avanços consideráveis na precisão do modelo.

TABELA 10 – ERRO ACUMULADO PARA A CHAPA FINA SUBMETIDA A FORÇA DE IMPACTO

	PUAIG BS	PUAIG Pol
	168 gdl	168 gdl
$u$	$1.37 \times 10^{-6}$	$2.91 \times 10^{-6}$

### 7.3 EXEMPLO 8 - MEMBRANA RETANGULAR FIXA NAS EXTREMIDADES

Neste exemplo a equação da onda bidimensional é modelada sob o contexto da análise modal. É considerada uma membrana fixa em sua borda externa, cujo esquema é apresentado na figura 104. Utiliza-se parâmetros  $L_x = L_y = 1m$  e  $c =$

$1m/s$ . O problema possui solução analítica conhecida para as frequências, que é desenvolvida por Kreyszig (2010) e Duffy (2010), dada por:

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}, \quad (195)$$

para  $m, n = 1, 2, 3, \dots$

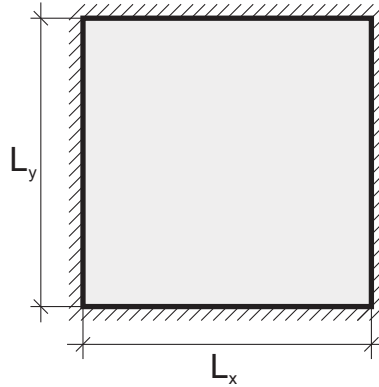


FIGURA 104 – MEMBRANA FIXA NAS FRONTEIRAS

O problema foi modelado com PUAIG com base polinomial  $p = 3$  e  $n = 4$  funções em cada direção e enriquecimento com um único nível com parâmetro  $\beta_1 = \pi$ . Os erros relativos das 10 primeiras frequências são mostrados na tabela 11, onde os resultados são comparados com os obtidos por (TORII, 2012) para o MEFG, que utilizou malhas  $8 \times 8$  com 1 nível de enriquecimento  $\beta_1 = \pi$ .

TABELA 11 – ERROS RELATIVOS DA MEMBRANA FIXA

i	AIG 36 gdl	MEFG <sup>1</sup> 1088 gdl	PUAIG BS 32 gdl	PUAIG Lin 32 gdl
1	$2.9467 \times 10^{-5}$	$8.0566 \times 10^{-8}$	$1.7063 \times 10^{-7}$	$1.9991 \times 10^{-16}$
2	$3.5052 \times 10^{-4}$	$2.2612 \times 10^{-7}$	$8.3554 \times 10^{-5}$	$2.2540 \times 10^{-7}$
3	$1.9192 \times 10^{-3}$	$2.2612 \times 10^{-7}$	$1.8932 \times 10^{-3}$	$1.0921 \times 10^{-5}$
4	$7.3561 \times 10^{-3}$	$2.6251 \times 10^{-7}$	$3.5815 \times 10^{-2}$	$4.3986 \times 10^{-3}$
5	$2.3377 \times 10^{-2}$	$3.7725 \times 10^{-7}$	$2.9536 \times 10^{-2}$	$3.7341 \times 10^{-4}$
6	$2.3683 \times 10^{-2}$	$3.7725 \times 10^{-7}$	$1.1597 \times 10^{-2}$	$1.5138 \times 10^{-2}$
7	$7.4532 \times 10^{-3}$	$3.6477 \times 10^{-7}$	$5.2735 \times 10^{-2}$	$8.2887 \times 10^{-3}$
8	$3.3597 \times 10^{-2}$	$3.6477 \times 10^{-7}$	$3.5768 \times 10^{-2}$	$2.9261 \times 10^{-2}$
9	$5.6671 \times 10^{-3}$	$3.9379 \times 10^{-7}$	$4.7417 \times 10^{-2}$	$1.1278 \times 10^{-2}$
10	$2.0399 \times 10^{-2}$	$3.9379 \times 10^{-7}$	$2.5994 \times 10^{-2}$	$1.1481 \times 10^{-2}$

<sup>1</sup> Torii (2012)

A tabela mostra que os erros para as duas primeiras frequências com a PUAIG foram precisos, especialmente para a PUAIG Linear que atinge a solução analítica na primeira frequência. Contudo à partir da terceira posição os erros começam de ficar mais acentuados, sendo que o MEFG consegue manter a estabilidade dos resultados na casa de  $10^{-7}$ , apesar de ter sido modelado com um número muito maior de graus de liberdade.

#### 7.4 EXEMPLO 9 - MEMBRANA RETANGULAR SUJEITA A CARREGAMENTO HARMÔNICO

O problema transiente para a equação da onda bidimensional consiste em uma placa quadrada, com uma extremidade fixa e uma excitação na extremidade di-

reita, que é escrita em forma de uma força com módulo  $\sin(\omega t)$ , onde  $\omega$  é a frequência de excitação. O problema é ilustrado através da equação 105. A solução analítica utilizada neste problema é a mesma do exemplo 4, dada pela equação 182. Utiliza-se a velocidade da onda  $c = 1m/s$ ,  $L_x = L_y = 1m$  e  $\omega = 30rad/s$ .

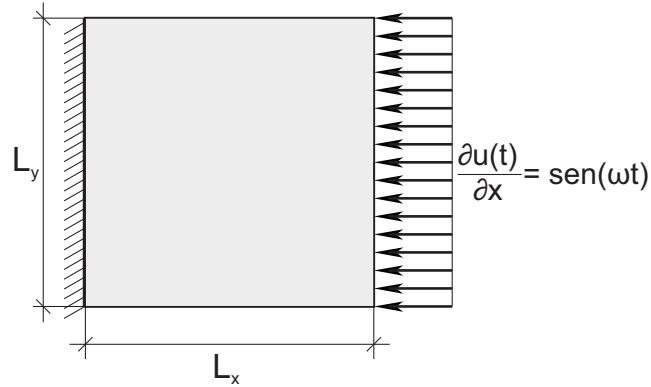


FIGURA 105 – MEMBRANA RETANGULAR SUJEITA A CARREGAMENTO HARMÔNICO

O problema é modelado através da AIG pura, com grau  $p = 3$  e  $n = 4$  funções em cada direção. A mesma base é utilizada para a aproximação através da PUAIG. É utilizado o método de Newmark, com tempo total  $t = 2s$  e  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ . Na primeira análise a PUAIG utiliza parâmetro  $\beta_1 = \pi$  para as investigações iniciais dos modos dominantes. A figura 106 mostra os deslocamentos no centro da membrana da AIG e da PUAIG com funções Arndt para o intervalo de tempo considerado.

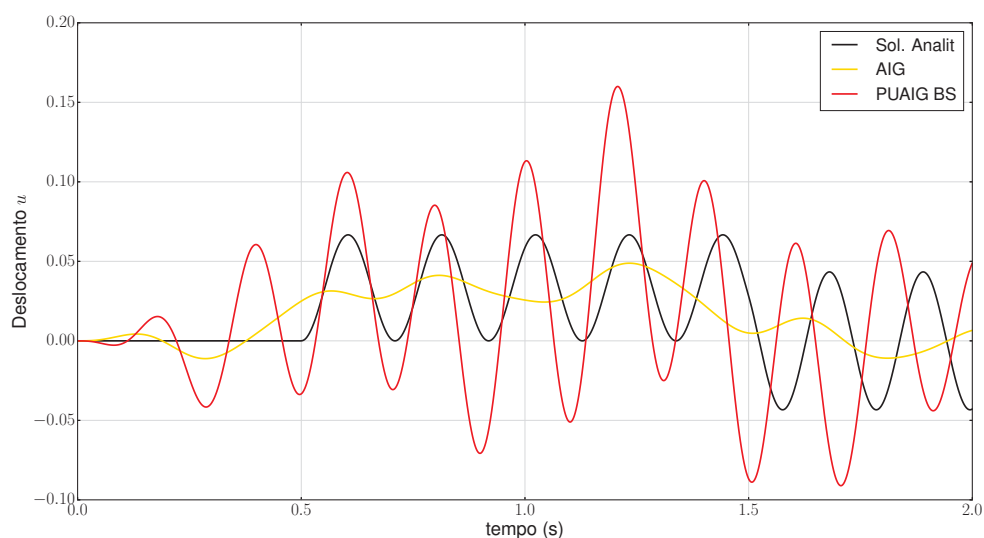


FIGURA 106 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES DA MEMBRANA COM EXCITAÇÃO HARMÔNICA PARA AIG E PUAIG

A figura 106 mostra que as oscilações resultantes ficam discrepantes da solução analítica em praticamente todo o domínio, gerando ainda uma notável diferença de fase na PUAIG que é visível a partir do segundo ciclo. Os erros acumulados destes deslocamentos são mostrados na tabela 12. A análise no domínio da frequência é mostrada através da figura 107, onde é possível observar que, assim como no problema da barra com excitação harmônica, os modos dominantes de oscilação são os próximos à frequência de excitação ( $30\text{rad/s}$ ). Efetua-se, portanto, uma nova análise com a PUAIG utilizando novos níveis, com parâmetros  $\beta$  correspondentes às frequências mais dominantes na análise. Para este caso utiliza-se os parâmetros  $\beta$  com o segundo, terceiro, quarto e quinto modo, totalizando 4 níveis de enriquecimento. Os deslocamentos apresentados pela PUAIG adaptativa são mostrados na figura 108, em comparação com a solução analítica.

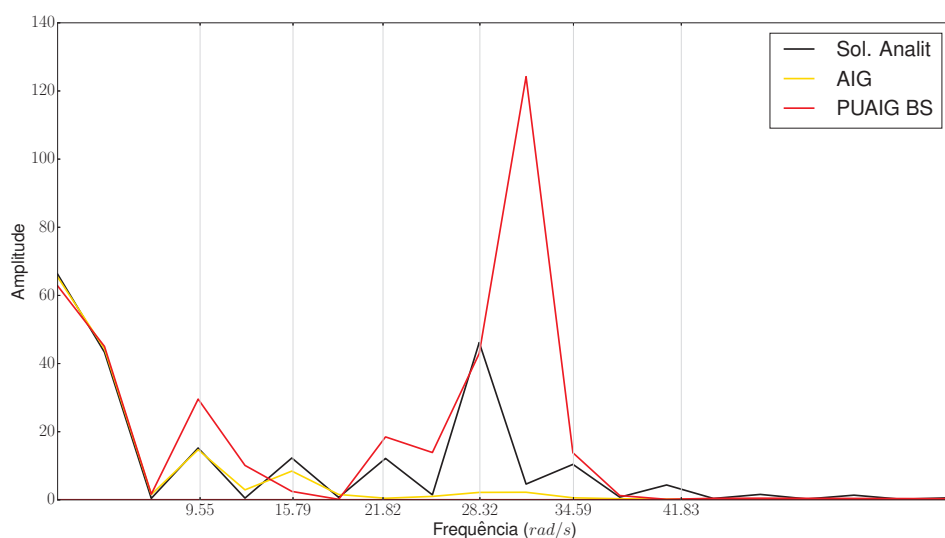


FIGURA 107 – ANÁLISE DOS DESLOCAMENTOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

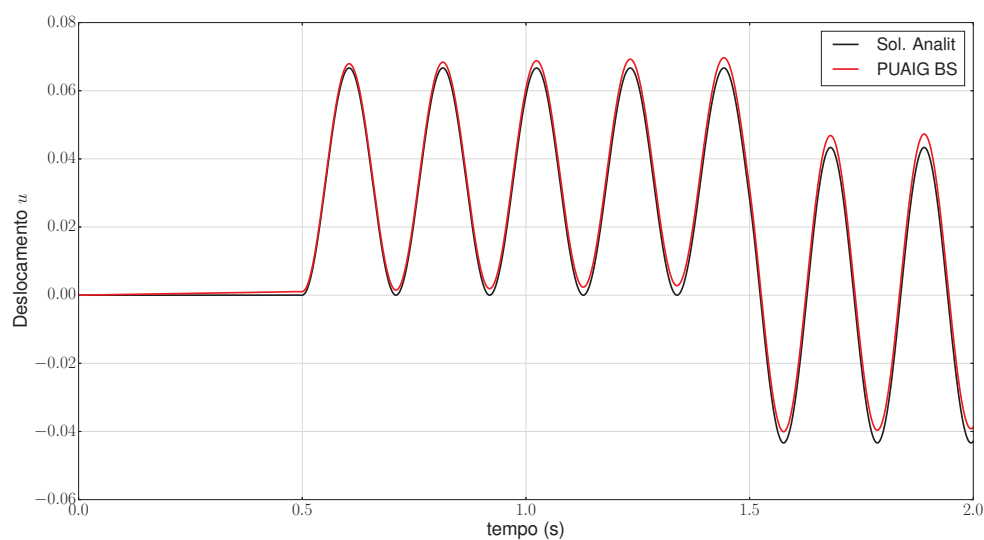


FIGURA 108 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES DA MEMBRANA COM EXCITAÇÃO HARMÔNICA PARA A PUAIG COM ENRIQUECIMENTO ADAPTATIVO

Nota-se uma melhoria no campo de oscilações, que ficam muito próximos à solução analítica. A figura 109 mostra a análise no domínio da frequência, onde os espectros da PUAIG e da solução analítica ficam muito próximos. O erro acumulado é medido para as duas análises e comparado com os resultados obtidos para o MEFG por Torii (2012), que utilizou um nível de enriquecimento e malha  $6 \times 2$ . É possível observar que a PUAIG aprimorou consideravelmente os resultados através do proce-

dimento adaptativo e apresenta erro acumulado inferior ao MEFG, com menor número de graus de liberdade.

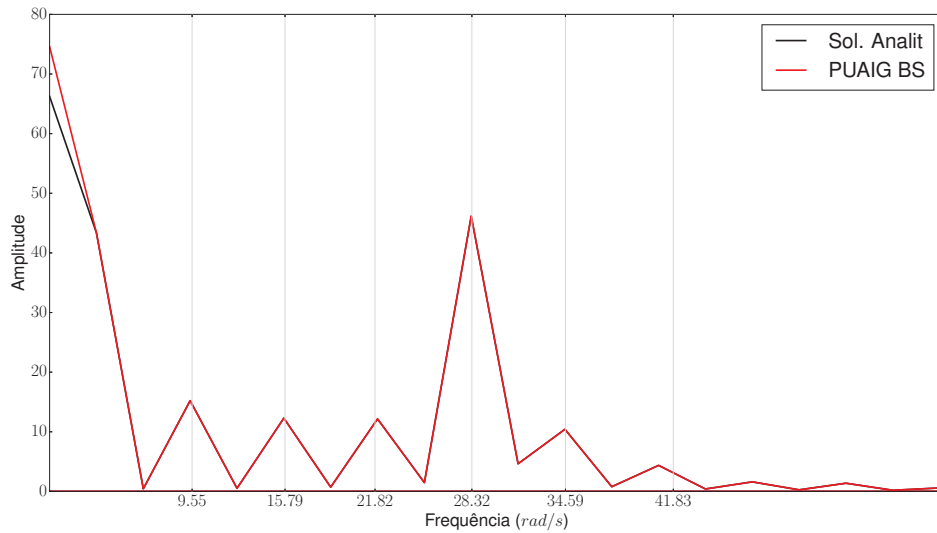


FIGURA 109 – ANÁLISE DO DESLOCAMENTO DA PUAIG ADAPTATIVA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

TABELA 12 – ERROS ACUMULADOS PARA MEMBRANA SUBMETIDA A EXCITAÇÃO HARMÔNICA

AIG	PUAIG $\beta_1 = \pi$	PUAIG Adap	MEFG <sup>1</sup>
12 gdl	28 gdl	76 gdl	204 gdl
0.039	0.081	0.0025	0.0044

<sup>1</sup> Torii (2012)



## 8 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma formulação enriquecida com a Análise Isogeométrica aplicada aos problemas da dinâmica das estruturas, que consistiram em análises modais e transientes de elementos lineares unidimensionais e bidimensionais. As formulações variacionais dos problemas dinâmicos foram abordadas sob o contexto do mapeamento CAD, característico da AIG e os detalhes de implementação da PU-AIG foram apresentados. Sob o contexto de validação do método, é possível observar que os resultados se aproximam das soluções analíticas ou de referência para todos os problemas analisados, e possuem também estabilidade numérica, indicando que os resultados melhoram para as variadas formas de refinamento apresentadas.

No caso do problema de barra é possível observar uma alta acurácia da PU-AIG nas frequências de enriquecimento, sendo que os resultados melhoraram consideravelmente para o refinamento  $h$ , sobressaindo-se as formas com enriquecimento local. A PUAIG para os problemas de barra mostra-se eficiente com relação ao aumento no número de níveis de enriquecimento, onde os resultados alcançam acurácias elevadas para toda a amostra de frequências. Já com relação aos espectros de erro das amostras totais, a PUAIG, assim como o MEFG apresentaram espectros menos precisos quando comparados com a AIG, característica já observada por Cottrell et al. (2006) e Rauen, Machado e Arndt (2017b), onde é neste trabalho reforçada. O processo adaptativo para os problemas de barra mostrou-se muito preciso e altamente competitivo com o MEFG, sendo que a PUAIG apresentou resultados melhores para a barra unitária e menos precisos para a barra heterogênea quando comparados com o MEFG. O processo adaptativo para a análise de vibração forçada do elemento de barra mostra-se muito eficiente, onde o enriquecimento com os modos dominantes de fato melhoram significativamente o problema, visto que a transformada no domínio na frequência aponta com precisão quais modos podem ser utilizados como enriqueci-

mento.

Uma desvantagem apresentada pela PUAIG, que também é observada nos demais métodos enriquecidos, é o elevado número de condição quando comparado aos métodos puros. A solução geralmente adotada para se contornar quaisquer resultados indesejados ou espúrios está em aumentar o número de dígitos significativos em toda a análise, o que afeta o tempo computacional de processamento. Neste trabalho foram utilizados 32 dígitos significativos, que foram suficientes para que não houvesse ocorrência de modos espúrios. Técnicas de estabilização que estão sendo testadas no MEFG também poderão ser incorporadas no contexto da PUAIG.

Os experimentos da barra heterogênea e da treliça de sete barras indicam que o efeito do mapeamento CAD é válido também nas parcelas enriquecidas, sendo que um enriquecimento no espaço unitário pode ser mapeado para o espaço físico, aprimorando os resultados. O mapeamento das treliças com a metodologia apresentada neste trabalho foi realizado com êxito, levando a valores competitivos com o MEFG e menores graus de liberdade. Na totalidade dos experimentos realizados, a PUAIG obteve resultados mais precisos que a AIG pura, o que era esperado, e o que contribui para a validação do método. Os resultados desenvolvidos para o elemento de viga de Euler-Bernoulli em vibração livre foram competitivos com o MEFG com relação ao aumento de níveis de enriquecimento, e alguns resultados de vibração forçada perderam em precisão para o MEFG, mesmo que a PUAIG tenha aprimorado com sucesso os resultados da AIG pura.

No problema do estado plano de tensões observa-se que a PUAIG efetua um aprimoramento nos resultados da AIG, contudo apresentou resultados inferiores do que o MEFG em termos de acurácia para os problemas modais. Os procedimentos adaptativos na análise transiente bidimensional obtiveram êxito, visto que melhoraram os erros acumulados das oscilações e suas derivadas temporais. O problema da onda circular mostrou a capacidade da PUAIG em mapear expressões analíticas também para geometrias mais complexas, o que caracteriza um aspecto muito vantajoso desta formulação.

De maneira geral, através dos modelos testados, verificou-se que a PUAIG apresentou vantagens relacionadas a acurácia e alta convergência, melhorando os resultados da AIG e trazendo a vantagem de implementação relacionada ao malhamento CAD. Neste trabalho não foram modelados problemas com geometrias mais complexas do que os domínios circulares, bem como seções heterogêneas e vazadas, principalmente para os casos bidimensionais. Para trabalhos futuros e aprimoramentos da PUAIG, sugere-se a extensão deste método para mapeamentos complexos e heterogêneos, bem como investigações mais detalhadas sobre os métodos adaptativos para análise transiente. Para os problemas de vigas, a PUAIG pode ser aprimorada no sentido de testar novas estratégias de enriquecimento no que tange outras partições da unidade, bem como outras funções enriquecedoras.

Este trabalho apresentou uma formulação enriquecida com a Análise Isogeométrica aplicada aos problemas da dinâmica das estruturas, que consistiram em análises modais e transientes de elementos lineares unidimensionais e bidimensionais. As formulações variacionais dos problemas dinâmicos foram abordadas sob o contexto do mapeamento CAD, característico da AIG e os detalhes de implementação da PUAIG foram apresentados. Sob o contexto de validação do método, é possível observar que os resultados se aproximam das soluções analíticas ou de referência para todos os problemas analisados, e possuem também estabilidade numérica, indicando que os resultados melhoram para as variadas formas de refinamento apresentadas.

No caso do problema de barra é possível observar uma alta acurácia da PUAIG nas frequências de enriquecimento, sendo que os resultados melhoraram consideravelmente para o refinamento  $h$ , sobressaindo-se as formas com enriquecimento local. A PUAIG para os problemas de barra mostra-se eficiente com relação ao aumento no número de níveis de enriquecimento, onde os resultados alcançam acurácias elevadas para toda a amostra de frequências. Já com relação aos espectros de erro das amostras totais, a PUAIG, assim como o MEFG apresentaram espectros menos precisos quando comparados com a AIG, característica já observada por Cottrell et al. (2006) e Rauen, Machado e Arndt (2017b), onde é neste trabalho reforçada. O

processo adaptativo para os problemas de barra mostrou-se muito preciso e altamente competitivo com o MEFG, sendo que a PUAIG apresentou resultados melhores para a barra unitária e menos precisos para a barra heterogênea quando comparados com o MEFG. O processo adaptativo para a análise de vibração forçada do elemento de barra mostra-se muito eficiente, onde o enriquecimento com os modos dominantes de fato melhoram significativamente o problema, visto que a transformada no domínio na frequência aponta com precisão quais modos podem ser utilizados como enriquecimento.

Uma desvantagem apresentada pela PUAIG, que também é observada nos demais métodos enriquecidos, é o elevado número de condição quando comparado aos métodos puros. A solução geralmente adotada para se contornar quaisquer resultados indesejados ou espúrios está em aumentar o número de dígitos significativos em toda a análise, o que afeta o tempo computacional de processamento. Neste trabalho foram utilizados 32 dígitos significativos, que foram suficientes para que não houvesse ocorrência de modos espúrios. Técnicas de estabilização que estão sendo testadas no MEFG também poderão ser incorporadas no contexto da PUAIG.

Os experimentos da barra heterogênea e da treliça de sete barras indicam que o efeito do mapeamento CAD é válido também nas parcelas enriquecidas, sendo que um enriquecimento no espaço unitário pode ser mapeado para o espaço físico, aprimorando os resultados. O mapeamento das treliças com a metodologia apresentada neste trabalho foi realizado com êxito, levando a valores competitivos com o MEFG e menores graus de liberdade. Na totalidade dos experimentos realizados, a PUAIG obteve resultados mais precisos que a AIG pura, o que era esperado, e o que contribui para a validação do método. Os resultados desenvolvidos para o elemento de viga de Euler-Bernoulli em vibração livre foram competitivos com o MEFG com relação ao aumento de níveis de enriquecimento, e alguns resultados de vibração forçada perderam em precisão para o MEFG, mesmo que a PUAIG tenha aprimorado com sucesso os resultados da AIG pura.

No problema do estado plano de tensões observa-se que a PUAIG efetua um

aprimoramento nos resultados da AIG, contudo apresentou resultados inferiores do que o MEFG em termos de acurácia para os problemas modais. Os procedimentos adaptativos na análise transiente bidimensional obtiveram êxito, visto que melhoraram os erros acumulados das oscilações e suas derivadas temporais. O problema da onda circular mostrou a capacidade da PUAIG em mapear expressões analíticas também para geometrias mais complexas, o que caracteriza um aspecto muito vantajoso desta formulação.

De maneira geral, através dos modelos testados, verificou-se que a PUAIG apresentou vantagens relacionadas a acurácia e alta convergência, melhorando os resultados da AIG e trazendo a vantagem de implementação relacionada ao malhamento CAD. Neste trabalho não foram modelados problemas com geometrias mais complexas do que os domínios circulares, bem como seções heterogêneas e vazadas, principalmente para os casos bidimensionais. Para trabalhos futuros e aprimoramentos da PUAIG, sugere-se a extensão deste método para mapeamentos complexos e heterogêneos, bem como investigações mais detalhadas sobre os métodos adaptativos para análise transiente. Para os problemas de vigas, a PUAIG pode ser aprimorada no sentido de testar novas estratégias de enriquecimento no que tange outras partições da unidade, bem como outras funções enriquecedoras.

## REFERÊNCIAS

- AURICCHIO, F.; CALABRÒ, F.; HUGHES, T.; REALI, A.; SANGALLI, G. A simple algorithm for obtaining nearly optimal quadrature rules for NURBS-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 249-252, p. 15 - 27, 2012.
- AURICCHIO, F.; DA VEIGA, L. B.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SANGALLI, G. ISO-GEOMETRIC COLLOCATION METHODS. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 20, p. 2075-2107, 2010.
- AURICCHIO, F.; VEIGA, L. B.; HUGHES, T.; REALI, A.; SANGALLI, G. Isogeometric collocation for elastostatics and explicit dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 249-252, p. 2 - 14, 2012.
- ABDELAZIZ, Y.; HAMOUINE, A. A survey of the extended finite element. **Computers & Structures**, v. 86, p. 1141 - 1151, 2008.
- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. **Energy Theorems and Structural Analysis**. Butterworth & Co., 1960.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D. Comparative Analysis of the Generalized Finite Element Method and the K-Orthogonal Hierarchical Finite Element Method For Free Vibration Analysis. In: XXXIV IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, **Proceedings of the XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Pirenópolis, Brazil, 2013.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; HECKE, M. B. The composite element method applied to free vibration analysis of trusses and beams. **Applied Numerical Mathematics**, v. 47, p. 59 - 73, 2003.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. An Adaptive Generalized Finite Element Method Applied to Free Vibration Analysis of Straight Bars and Trusses. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, p. 659-672, 2010.
- ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. Accurate assessment of natural frequencies for uniform and non- uniform Euler-Bernoulli beams and frames by adaptive generalized finite element method. **Engineering Computations**, v. 33, 2016.
- ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado À Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas**. Tese (Doutorado em Método Numéricos em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- BARTH, T. J. **Simplified numerical methods for gas dynamics systems on triangulated domains**. Tese (Department of Aeronautics and Astronautics) - Stanford University, 1998.

- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 201-204, p. 91 - 111, 2012.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. GENERALIZED FINITE ELEMENT METHODS — MAIN IDEAS, RESULTS AND PERSPECTIVE. **International Journal of Computational Methods**, v. 01, p. 67-103, 2004.
- BECKER, E.; CAREY, G.; ODEN, J. **Finite Elements: Mathematical Aspects**. Prentice-Hall, 1983.
- BAZILEVS, Y.; VEIGA, L. B.; COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; SANGALLI, G. Iso-geometric Analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 16, p. 1031-1090, 2006.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 727-758, 1997.
- BELTRAN, J. V.; MONTERDE, J. Bézier Solutions of the Wave Equation. **Computational Science and Its Applications – ICCSA 2004**. Berlin, Heidelberg, 2004.
- BÉCHET, E.; MINNEBO, H.; MOËS, N.; BURGARDT, B. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 64, p. 1033-1056, 2005.
- BARROS, F. B.; PROENÇA, S. P. B.; BARCELLOS, C. S. Generalized finite element method in structural nonlinear analysis – a p-adaptive strategy. **Computational Mechanics**, v. 33, p. 95 - 107, 2004.
- BRIGHAM, E. **The Fast Fourier Transform and Its Applications**. Prentice Hall, 1988.
- BEZHAEV, A. Y.; VASILENKO, V. A. **Variational theory of splines**. Springer, 2001.
- BAZILEVS, Y.; VEIGA, L.; COTTRELL, J.; HUGHES, T.; SANGALLI, G. Isogeometric Analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 16, 2011.
- COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**. 1st Edition. ed. USA: John Wiley & Sons, 2009.
- CHANDRUPATLA, T. **Finite Element Analysis For Engineering & Tech..** Orient BlackSwan, 2004.
- CHENG, F. Y. **Matrix analysis of structural dynamics**. Nova Iorque: Marcel Dekker, 2001.
- CHOPRA, A. **Dynamics of structures, a primer**. Earthquake Engineering Research Institute, 1995.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, A. T. J. R.; REALI, A. Studies of Refinement and Continuity in Isogeometric Structural Analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 4160-4183, 2007.



CHEN, J.-S.; HILLMAN, M.; RÜTER, M. An arbitrary order variationally consistent integration for Galerkin meshfree methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 95, p. 387-418, 2013.

CITTADIN, C. C. Aplicação de Refinamentos h e p do Método dos Elementos Finitos na Análise de Vibração Livre de Trelças Planas. **Trabalho de Conclusão de Curso - Eng. Civil, Universidade Federal do Paraná**, 2017.

CHENEY, E.; KINCAID, D. **Numerical Mathematics and Computing**. Cengage Learning, 2007.

CHEN, L.; LINGEN, E. J.; BORST, R. Adaptive hierarchical refinement of NURBS in cohesive fracture analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 112, p. 2151-2173, 2017.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1989.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Element: Computational Aspects**. New Jersey: Prentice Hall, 1984.

COX, M. G. The Numerical Evaluation of B-Splines. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 10, p. 134-149, 1972.

CLOUGH, R.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. McGraw-Hill, 1993.

COTTRELL, J. A.; REALI, A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric Analysis of Structural Vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 5257-5196, 2006.

DE-BOOR, C. On Calculation of B-Splines. **Journal of Approximation Theory**, v. 6, p. 50-62, 1972.

DE-BEL, E.; VILLON, P.; BOUILLARD, P. Forced vibrations in the medium frequency range solved by a partition of unity method with local information. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, p. 1105-1126, 2005.

DEBELLA, L. B. C. **Análise Dinâmica Transiente Pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Curitiba: Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2018.

DUARTE, C.; HAMZEH, O.; LISZKA, T.; TWORZYDLO, W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 2227 - 2262, 2001.

DITTMANN, M. **Isogeometric analysis and hierarchical refinement for multi-field contact problems**. KIT Scientific Publishing, 2017.

DUARTE, C.; KIM, D.-J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 487 - 504, 2008.



DE LORENZIS, L.; TEMIZER, .; WRIGGERS, P.; ZAVARISE, G. A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 87, p. 1278-1300, 2011.

DAUX, C.; MOËS, N.; DOLBOW, J.; SUKUMAR, N.; BELYTSCHKO, T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, p. 1741-1760, 2000.

DUARTE, C.; ODEN, J. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 237 - 262, 1996.

DINACHANDRA, M.; SETHURAMAN, R. Plane wave enriched Partition of Unity Isogeometric Analysis (PUIGA) for 2D-Helmholtz problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, p. 1–37, 2018.

DUFFY, D. **Advanced Engineering Mathematics with MATLAB**. CRC Press, 2010.

ENGEL, G.; GARIKIPATI, K.; HUGHES, T. J. R.; LARSON, M. G.; MAZZEI, L. ET AL. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, p. 3669-3750, 2002.

ENGELS, R. C. Finite Element Modeling of dynamic behavior of some basic structural members. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 114, p. 3-9, 1992.

FARIN, G. E. **NURBS: from projective geometry to practical use**. 2. ed. Natick: A K Peters, 1999.

FARIN, G. **Curves and Surfaces for CAD: a practical guide**. 5th edition. ed. USA: Academic Press, 2002.

FREISLEBEN, P. L. M. **Análise Dinâmica de Vigas de Timoshenko Utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Curitiba: Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2019.

GUPTA, V.; DUARTE, C.; BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 289, p. 355 - 386, 2015.

GANESAN, N.; ENGELS, C. Hierarchical Bernoulli-Euler Beam Finite Elements. **Computer & Structures**, v. 43, p. 297-304, 1992.

GOULD, N. I. M.; HU, Y.; SCOTT, J. A. **A numerical evaluation of sparse direct solvers for the solution of large sparse, symmetric linear systems of equations**. Oxfordshire: CCLRC Rutherford Appleton Laboratory, 2005. 35p. Relatório Técnico.

GHORASHI, S. S.; VALIZADEH, N.; MOHAMMADI, S. X-FEM in isogeometric analysis for linear fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 89, p. 1069-1101, 2011.

HAZARD, L.; BOUILLARD, P. Structural dynamics of viscoelastic sandwich plates by the partition of unity finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 4101-4116, 2007.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135-4195, 2005.

HILLMAN, M.; CHEN, J. S.; BAZILEVS, Y. Variationally consistent domain integration for isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 521-540, 2015.

HUGHES, T.; REALI, A.; SANGALLI, G. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, p. 301 - 313, 2010.

HSU, Y. S. Enriched finite element methods for Timoshenko beam free vibration analysis. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 7012 - 7033, 2016.

HSU, Y. S. Enriched finite element methods for timoshenko beam free vibration analysis. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 7012–7033, 2016.

HUGHES, T. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Dover Publications, 2012.

INMAN, D. **Engineering Vibration**. Prentice Hall, 2001.

KOZIEŃ, M. S. Analytical Solutions of Excited Vibrations of a Beam with Application of Distribution. **Acta Physica Polonica A**, v. 123, p. 1029-1033, 2013.

KOLMAN, R.; PLEŠEK, J.; OKROUHLÍK, M. Complex wavenumber Fourier analysis of the B-spline based finite element method. **Wave Motion**, v. 51, p. 348 - 359, 2014.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. John Wiley & Sons, 2010.

LAURSEN, T. A. **Computational Contact and Impact Mechanics**. Springer-Verlag, 2002.

LUYCKER, E. D.; BENSON, D. J.; BELYTSCHKO, T.; HSU, Y. B. M. C. X-FEM in isogeometric analysis for linear fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 87, p. 541-565, 2011.

LEUNG, A. Y. T.; CHAN, J. K. W. Fourier p-Element for the Analysis of Beams and Plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 212, p. 179-185, 1998.

LISZKA, T.; DUARTE, C.; TWORZYDLO, W. hp-Meshless cloud method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 263 - 288, 1996.

LUU, A.-T.; KIM, N.-I.; LEE, J. Isogeometric vibration analysis of free-form Timoshenko curved beams. **Meccanica**, v. 50, p. 169–187, 2015.

LEE, S. J.; PARK, K. S. Vibrations of Timoshenko beams with isogeometric approach. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 9174 - 9190, 2013.

LABORDE, P.; POMMIER, J.; RENARD, Y.; SALAÜN, M. High-order extended finite element method for cracked domains. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 64, p. 354-381, 2005.

LEUNG, A. Y. T.; ZHU, B. Fourier p-elements for curved beam vibrations. **Thin-Walled Structures**, v. 42, p. 39-57, 2004.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, p. 289-314, 1996.

MALEKAN, M.; BARROS, F. B. Well-conditioning global-local analysis using stable generalized/extended finite element method for linear elastic fracture mechanics. **Computational Mechanics**, v. 58, p. 819-831, 2016.

MENDONÇA, P. T. R.; BARCELLOS, C. S.; DUARTE, A. Investigations on the hp-Cloud Method by solving Timoshenko beam problems. **Computational Mechanics**, v. 25, p. 286-295, 2000.

MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis**. McGraw-Hill, 1975.

MANTZAFLARIS, A.; JÜTTLER, B. Integration by interpolation and look-up for Galerkin-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 373-400, 2015.

NOWACKI, W. **Dynamic of Elastic Systems**. New York: John Wiley & Sons. Inc., 1963.

ODEN, J. T. A new cloud-based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, p. 117 - 126, 1998.

OÑATE, E. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids**. Springer Netherlands, 2010.

OÑATE, E.; ZÁRATE, F. Rotation-free triangular plate and shell elements. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 47, p. 557-603, 2000.

PHAAL, R.; CALLADINE, C. R. A simple class of finite elements for plate and shell problems. I: Elements for beams and thin flat plates. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 35, p. 955-977, 1992a.

PHAAL, R.; CALLADINE, C. R. A simple class of finite elements for plate and shell problems. II: an element for thin shells, with only translational degrees of freedom. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 35, p. 979-966, 1992b.

PETYT, M. **Finite Element Vibration Analysis**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

PETROLI, T. **Condicionamento do Problema de Autovalores Obtido do Método de Elementos Finitos Generalizados na Dinâmica das Estruturas**. Curitiba: Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2016.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. Germany: Springer-Verlag, 1997.

QUEK, S.; LIU, G. **Finite Element Method: A Practical Course**. Elsevier Science, 2003.

RAO, S. **Mechanical Vibrations**. Addison-Wesley, 1995.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 4. ed. Burlington: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

RAUEN, M. **Análise Isogeométrica Aplicada aos Problemas de Vibração Livre na Mecânica das Estruturas**. Curitiba: Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2014.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. New York: McGraw-Hill, 1993.

REDDY, B. **Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements**. Springer New York, 2013.

RAO, K.; KIM, D.; HWANG, J. **Fast Fourier Transform - Algorithms and Applications**. Springer Netherlands, 2011.

RAUEN, M.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. An Enriched and Adaptive Algorithm for Free Vibration of Bars Using NURBS Approach. In: XXXVIII IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis, Brazil, 2017.

RAUEN, M.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. Isogeometric Analysis of Free Vibration of Framed Structures : Comparative Problems. **Engineering Computations**, v. 34, 2017.

RAUEN, M.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. An enriched formulation of isogeometric analysis applied to the dynamical response of bars and trusses. **Engineering Computations**, 2020.

ROGERS, D. F. **Introduction to NURBS: With a historical perspective**. London: Academic Press, 2001.

STOER, J.; BARTELS, R.; GAUTSCHI, W.; BULIRSCH, R.; WITZGALL, C. **Introduction to Numerical Analysis**. Springer New York, 2013.

STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; HIDAJAT, R. The generalized finite element method for Helmholtz equation: Theory, computation, and open problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 4711 - 4731, 2006.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 4081-4193, 2001.

SEVILLA, R.; FERNÁNDEZ-MÉNDEZ, S. Numerical integration over 2D NURBS-shaped domains with applications to NURBS-enhanced FEM. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, p. 1209–1220, 2011.

SHANG, H.; MACHADO, R.; FILHO, J. A. Dynamic analysis of Euler–Bernoulli beam problems using the Generalized Finite Element Method. **Computers and Structures**, v. 173, p. 109 - 122, 2016.

SILLEM, A.; SIMONE, A.; SLUYS, L. The Orthonormalized Generalized Finite Element Method–OGFEM: Efficient and stable reduction of approximation errors through multiple orthonormalized enriched basis functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 287, p. 112 - 149, 2015.

STANLEY, G. M. **Continuum-based Shell Elements**. Tese (Divison of Applied Mechanics) - Stanford University, 1985.

SHOJAEI, S.; VALIZADEH, N.; IZADPANAH, E.; BUI, T.; VU, T. V. Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method. **Composite Structures**, v. 94, p. 1677–1693, 2012.

TREFETHEN, L.; BAU, D. **Numerical Linear Algebra**. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1997.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. J.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of Aeronautic Society**, v. 23, p. 805-823, 1956.

TIMOSHENKO, S. **Vibration problems in Engineering**. 2nd. ed. Nova Iorque: D Van Nostrand Company, 1937.

TORII, A.; MACHADO, R. D. Transient dynamic structural analysis of bars and trusses using the generalized finite element method. v. 23, p. 1861-1877, 2010.

TORII, A. A. J.; MACHADO, R. D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 9, p. 1 - 31, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. GFEM for modal analysis of 2D wave equation. **Engineering Computations**, v. 32, p. 1779–1801, 2015.

THAI, C. H.; NGUYEN-XUAN, H.; NGUYEN-THANH, N.; LE, T.-H.; NGUYEN-THOI, T. ET AL. Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner–Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2012.

TORII, A. J. **Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado**. Tese (Doutorado em Método Numéricos em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

TEMIZER, .; WRIGGERS, P.; HUGHES, T. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 1100 - 1112, 2011.

TYRTYSHNIKOV, E. **A Brief Introduction to Numerical Analysis**. Birkhäuser Boston, 2012.

WIBERG, N. E.; ABDULWAHAB, F.; LI, X. D. Error estimation and adaptive procedures based on superconvergent patch recovery (SPR) techniques. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 4, p. 203–242, 1997.

WIBERG, N.-E.; BAUSYS, R.; HAGER, P. Improved eigenfrequencies and eigenmodes in free vibration analysis. **Computers & Structures**, v. 73, p. 79 - 89, 1999.

WEINHARDT, P. D. O.; DEBELLA, L. B. C.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. GFEM stabilization techniques applied to dynamic analysis of non-uniform section bars. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 15, 2018.

WEINHARDT, P. **Estudo da Estabilidade do Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise Dinâmica**. Curitiba: Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2016.

WANG, D.; LIU, W.; ZHANG, H. Superconvergent isogeometric free vibration analysis of Euler–Bernoulli beams and Kirchhoff plates with new higher order mass matrices. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 286, p. 230 - 267, 2015.

ZENG, P. COMPOSITE ELEMENT METHOD FOR VIBRATION ANALYSIS OF STRUCTURE, PART II: C1 ELEMENT (BEAM). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, p. 659 - 696, 1998.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and C0 element (bar). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, p. 619-658, 1998a.

ZENG, P. Introduction to Composite Element Method for Structural Analysis in Engineering. **Key Engineering Materials**, v. 145-149, p. 185-190, 1998c.

ZHANG, S.; JIN, J. **Computation of Special Functions**. Wiley, 1996.

ZHOU, Y. X.; SZE, K. Y. A rotation-free beam element for beam and cable analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 64, p. 79-89, 2013.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: Volume 1**. 5. ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000.

ZHANG, X.; TANG, Z.; YU, J.; GUO, M.; JIANG, L. Convex hull properties and algorithms. **Applied Mathematics and Computation**, v. 216, p. 3209-3218, 2010.



## ANEXO - EXEMPLOS ADICIONAIS

Este anexo apresenta exemplos adicionais da PUAIG, em comparação com o MEF, a AIG e o MEFG. Os resultados bem como as discussões destes exemplos são apresentados nas seções a seguir.

### EXEMPLO 10 - BARRA HETEROGÊNEA

Nesta seção são desenvolvidos os resultados para a barra heterogênea fixa em uma extremidade, com variação abrupta de seção e material, cujo esquema é mostrado na figura 110. A solução analítica para este problema foi desenvolvida inicialmente por Arndt (2009), dada por:

$$E_1 A_1 \kappa_1 \cos(\kappa_1 L_1) \cos(\alpha \kappa_1 L_2) - \alpha E_2 A_2 \kappa_1 \sin(\kappa_1 L_1) \sin(\alpha \kappa_1 L_2) = 0, \quad (196)$$

onde,  $E_1$ ,  $A_1$  e  $\rho_1$  são respectivamente o módulo de elasticidade, a área da seção transversal e a massa específica da seção esquerda, e  $E_2$ ,  $A_2$  e  $\rho_2$  as propriedades recíprocas para a seção direita. Os parâmetros  $\alpha$ ,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são dados por:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_2 E_1}{\rho_1 E_2}}, \quad (197)$$

$$\kappa_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E_1}}, \quad (198)$$

$$\kappa_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}. \quad (199)$$

As frequências naturais de vibração são obtidas pela equação 196 através de um algoritmo numérico para obtenção de raízes de equações não lineares. Neste trabalho utiliza-se o método de Newton-Raphson com 50 iterações, que geraram erros nulos para 16 dígitos significativos. Os parâmetros de material utilizados nos experimentos são  $E_1 = 1N/m^2$ ,  $E_2 = 2N/m^2$ ,  $L_1 = L_2 = 1m$ ,  $A_1 = 1m^2$ ,  $A_2 = 2m^2$ ,  $\rho_1 = 1kg/m^3$  e  $\rho_2 = 8kg/m^3$ . A tabela 13 mostra os resultados analíticos para a barra Heterogênea com os parâmetros de material considerados.

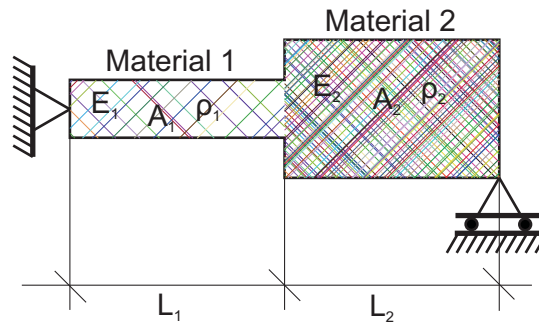


FIGURA 110 – BARRA HETEROGÊNEA FIXA EM UMA EXTREMIDADE



TABELA 13 – PRIMEIRAS 10 FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO ANALÍTICAS PARA A BARRA HETEROGÊNEA

i	Frequência (rad/s)
1	0.23794112483
2	1.57079632679
3	2.90365152876
4	3.37953377842
5	4.71238898038
6	6.04524418235
7	6.52112643201
8	7.85398163397
9	9.18683683594
10	9.6627190856

Os parâmetros de material no modelo numérico são inseridos no espaço paramétrico, o que consiste uma interessante facilidade para a implementação de problemas que envolvem materiais heterogêneos. As funções de material são definidas no espaço paramétrico na forma:

$$E(\xi) = A(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < \xi \leq 0.5 \\ 2 & \text{para } 0.5 < \xi \leq 1 \end{cases}, \quad (200)$$

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < \xi \leq 0.5 \\ 8 & \text{para } 0.5 < \xi \leq 1 \end{cases}. \quad (201)$$

### Refinamento $h$

Os modelos desenvolvidos na AIG e PUAIG para refinamento  $h$  da barra heterogênea consistem inicialmente em 2 elementos do tipo  $C^0$ , sendo uma função B-

Spline  $C^0$  aplicada na interface entre os materiais. O refinamento é realizado de modo que em cada grau, um novo elemento é inserido em cada lado da bi secção, ou seja, a cada grau de refinamento o acréscimo de elementos é duplicado. As funções B-Splines aplicadas possuem grau  $p = 2$  e os enriquecimentos são realizados com parâmetro  $\beta_1 = \pi$ . As figuras 111 - 116 mostram os erros relativos para o refinamento  $h$  em função do número de graus de liberdade do problema restringido.

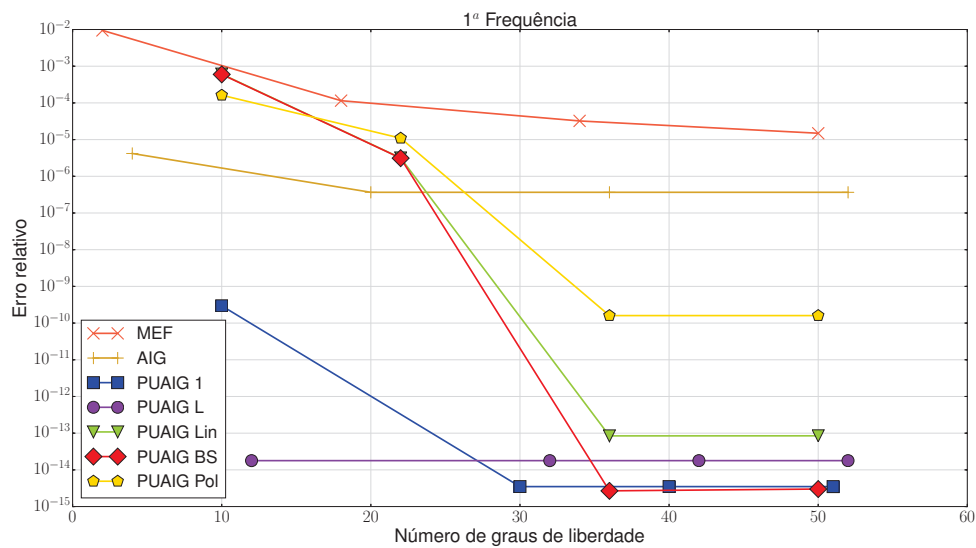


FIGURA 111 – ERRO RELATIVO DA 1<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO  $H$

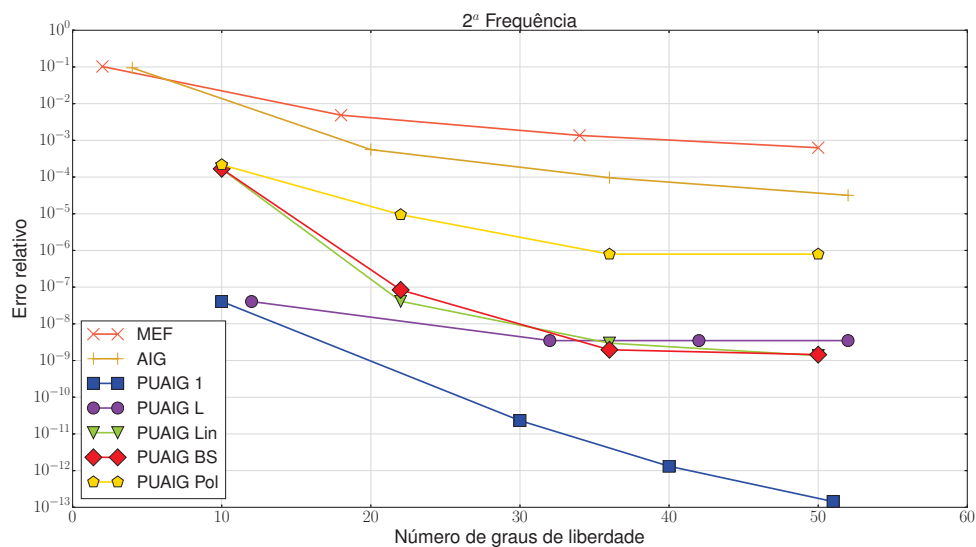


FIGURA 112 – ERRO RELATIVO DA 2<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO  $H$

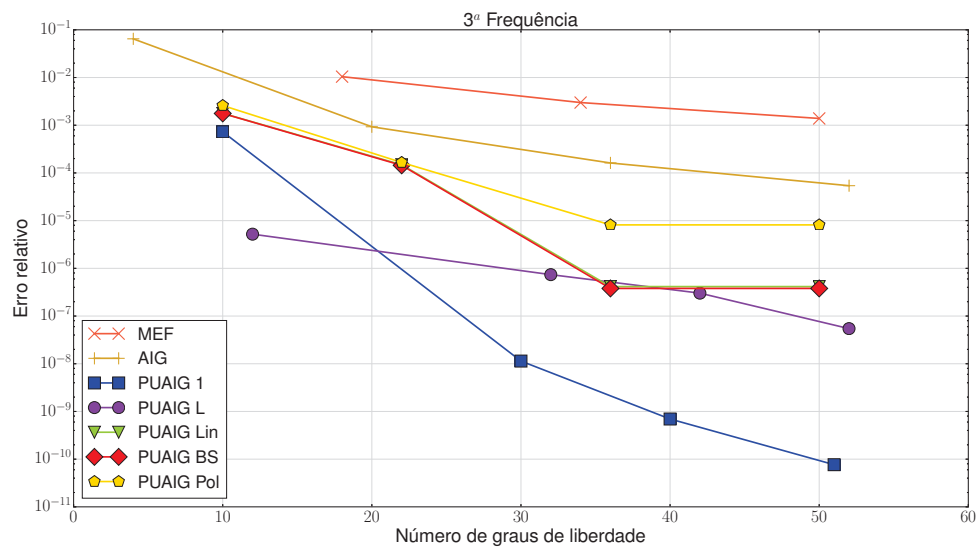


FIGURA 113 – ERRO RELATIVO DA 3ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO  $H$

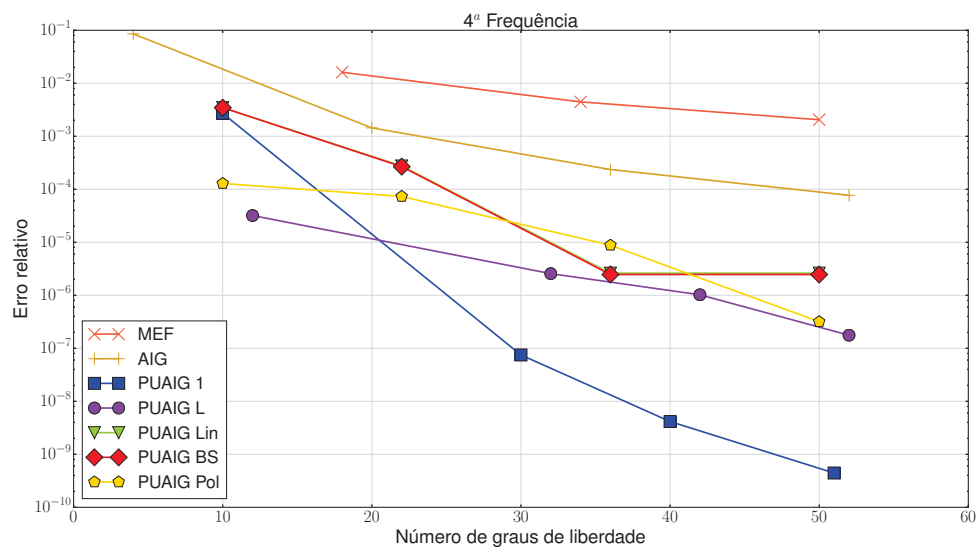


FIGURA 114 – ERRO RELATIVO DA 4ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO  $H$

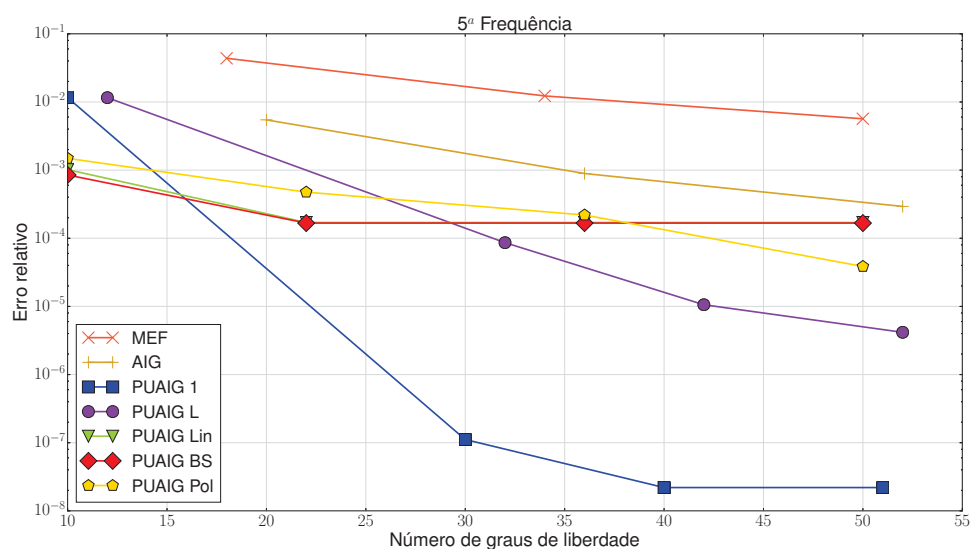


FIGURA 115 – ERRO RELATIVO DA 5<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO  $H$

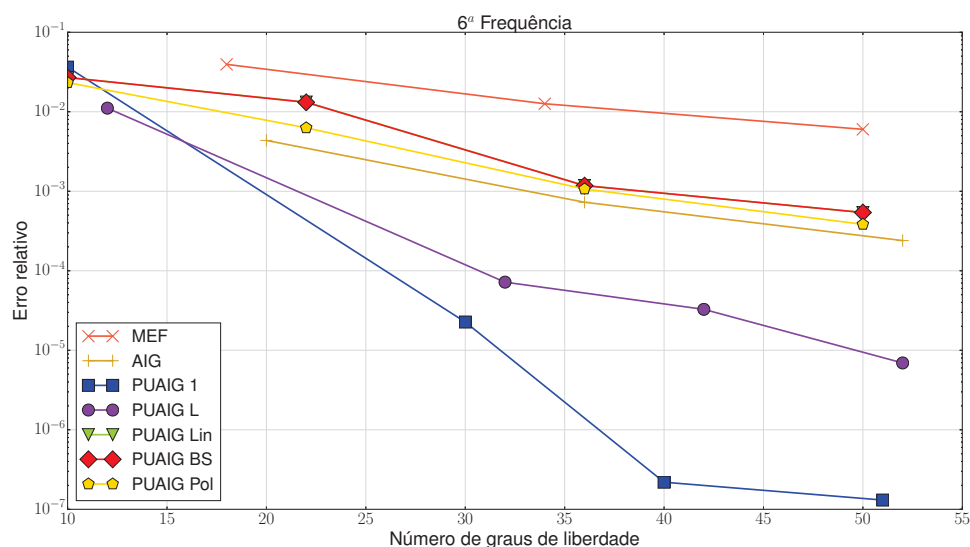


FIGURA 116 – ERRO RELATIVO DA 6<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO  $H$

Os resultados para a primeira frequência mostram que a PUAIG obteve valores muito próximos da analítica com poucos graus de refinamento, sendo os mais precisos obtidos pela PUAIG 1 e a PUAIG BS. Com o avanço das frequências mais altas, as formulações locais conseguem manter a convergência e a alta acurácia, ao ponto que a PUAIG com enriquecimento global vai degenerando sua precisão a ponto de perder

ligeiramente para a própria AIG pura.

O espectro de frequência é também analisado e mostrado através da figura 117.

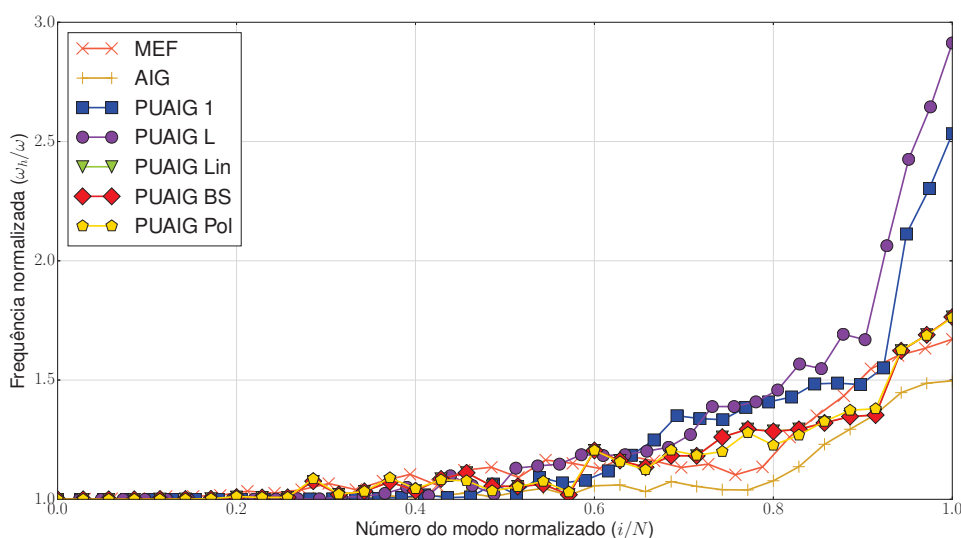


FIGURA 117 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO  $H$

Os espectros de frequência mostram que, diferente da barra homogênea, não houve regiões de salto abrupto bem definidas, onde um avanço gradativo no erro das frequência é observado em praticamente todos os modelos. Novamente é possível observar um avanço mais acentuado nas formas de enriquecimento locais onde o erro ultrapassa a margem de 50% a partir de 80% da amostra na PUAIG Local. A AIG pura obtém o espectro mais comportado, seguida do MEF e da PUAIG com enriquecimento global.

Em termos de condicionamento matricial, as figuras 118 e 119 mostram os números de condição das matrizes de massa e rigidez, respectivamente. Os modelos com enriquecimento local apresentam acentuado mal condicionamento, com números próximos do patamar de  $10^{20}$  para os graus mais elevados na matriz de massa. Os outros modelos apresentam números de condição menores que  $10^{16}$ . É também possível visualizar que o condicionamento da matriz de rigidez é menor do que a de massa em aproximadamente  $10^2$ .

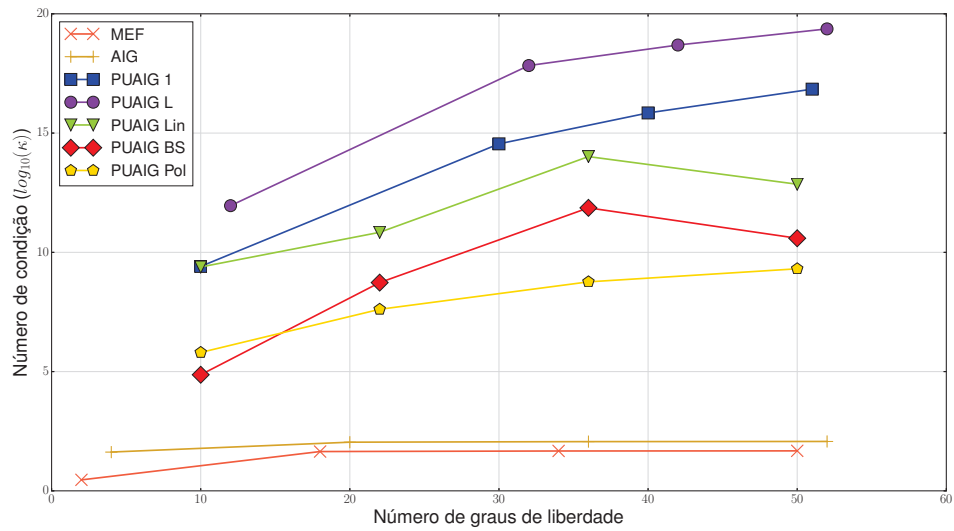


FIGURA 118 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO  $H$

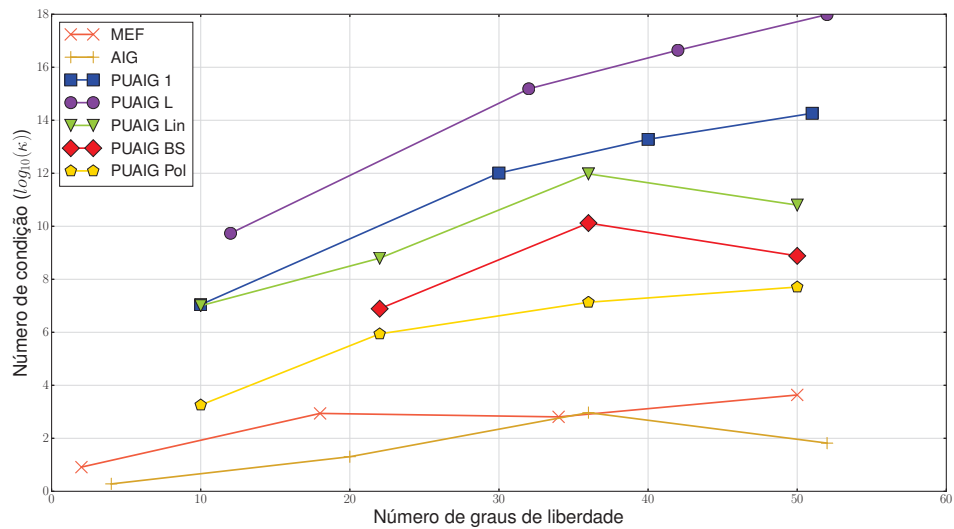


FIGURA 119 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO  $H$

### Níveis de Enriquecimento

A barra heterogênea também é testada em função do aumento no número de níveis de enriquecimento. Foram empregados neste caso os parâmetros  $\beta_j = j\pi$ .

De maneira análoga ao refinamento  $h$ , a barra é testada com 2 elementos e grau polinomial  $p = 2$ . As figuras 120 - 123 mostram os erros relativos em função do número de graus de liberdade das 4 primeiras frequências, onde as formulações da PUAIG são comparadas entre si.

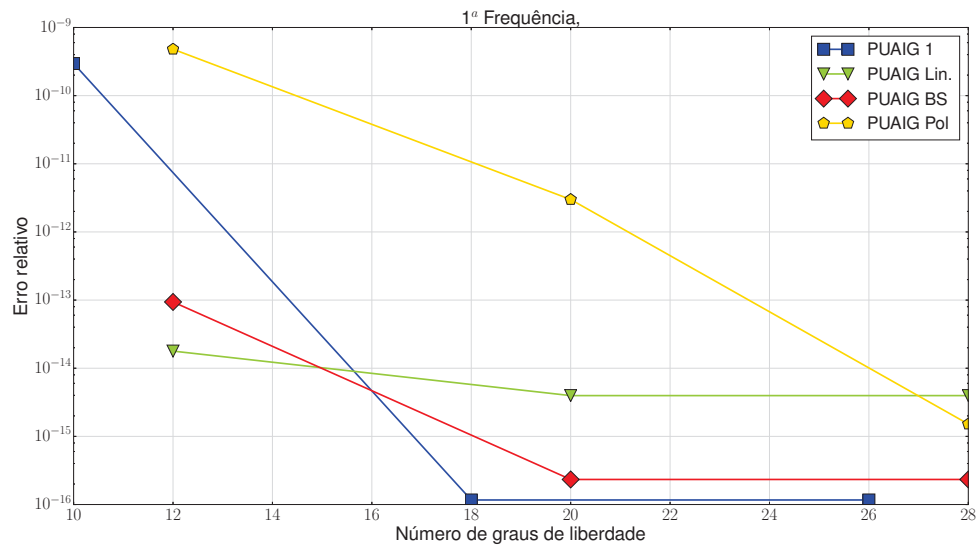


FIGURA 120 – ERRO RELATIVO DA 1<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

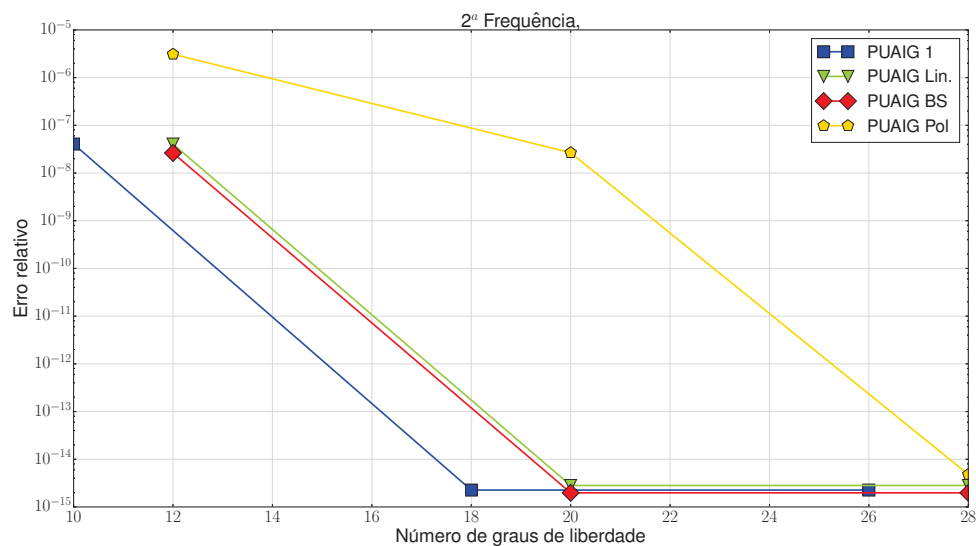


FIGURA 121 – ERRO RELATIVO DA 2<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

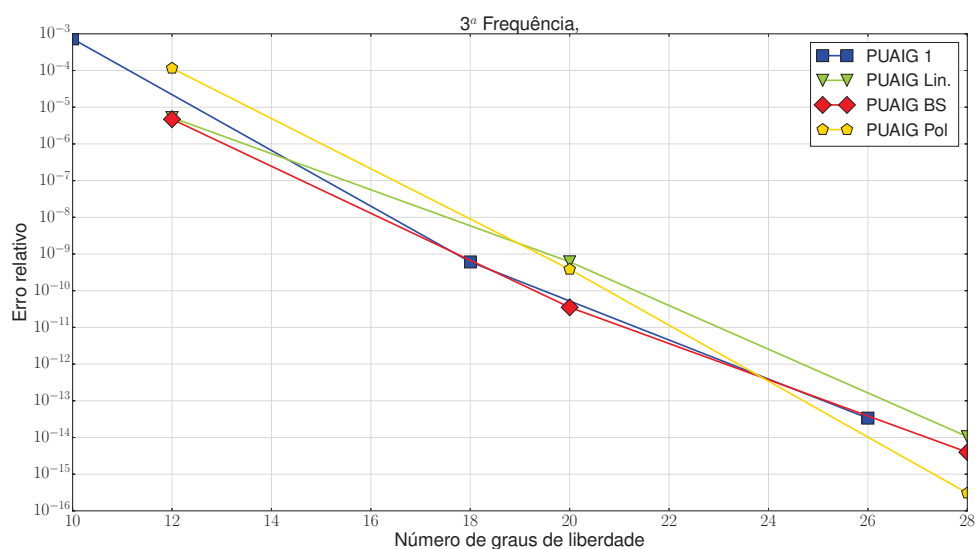


FIGURA 122 – ERRO RELATIVO DA 3ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

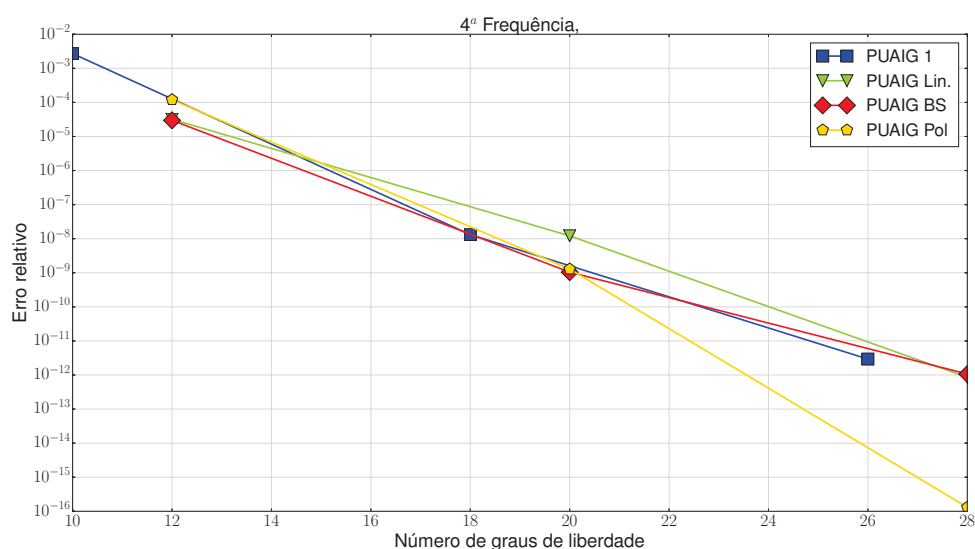


FIGURA 123 – ERRO RELATIVO DA 4ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

As figuras 120 e 121 mostram uma convergência mais rápida da PUAIG 1 para o erro zero da máquina na precisão de 16 dígitos significativos. Com o avanço das frequências, a PUAIG Polinomial começa de obter ganhos maiores em termos de precisão e convergência ao ponto que as demais formulações perdem força em termos de precisão.



Os números de condição, mostrados nas figuras 124 e 125 mostram-se acen-  
tuados em função do aumento de níveis de enriquecimento e ultrapassam a casa de  
 $10^{18}$  para os níveis mais altos, com exceção da PU Polinomial que mantém condi-  
cionamento mais baixo. Neste caso ambos condicionamentos, tanto de massa quanto  
rigidez apresentam-se na mesma magnitude.

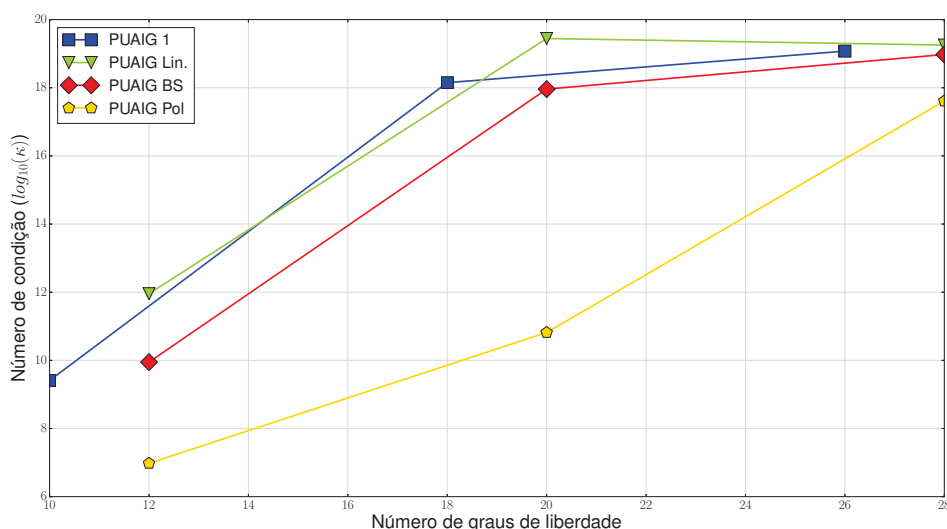


FIGURA 124 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

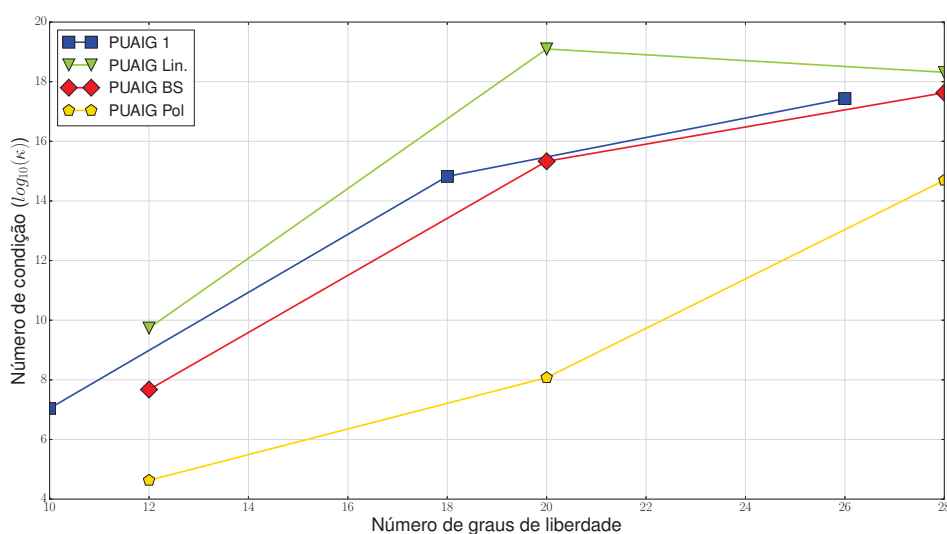


FIGURA 125 – NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA HETEROGÊNEA PARA NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO

## Refinamento Adaptativo

Para o refinamento adaptativo a PUAIG com PU B-Splines é comparada com os resultados obtidos por Arndt, Machado e Scremin (2010) para o MEFG. Neste exemplo a performance da PUAIG mostrou-se limitada, sendo competitivo com o MEFG apenas a PUAIG com PU B-Splines e grau polinomial  $p = 5$ . As figuras 126 - 131 mostram os erros relativos no processo adaptativo da PUAIG para as 6 primeiras frequências, em função do número de iterações do processo adaptativo.

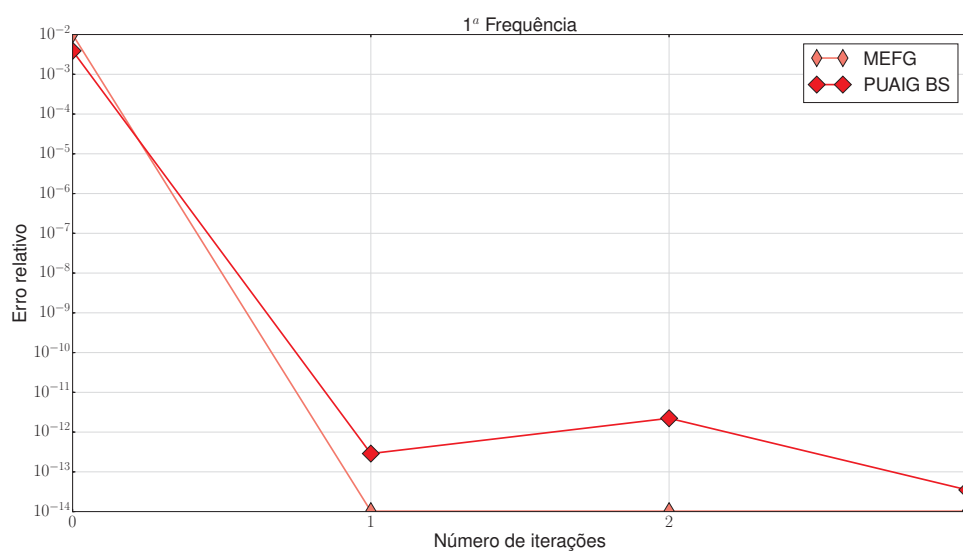


FIGURA 126 – ERRO RELATIVO DA 1<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO

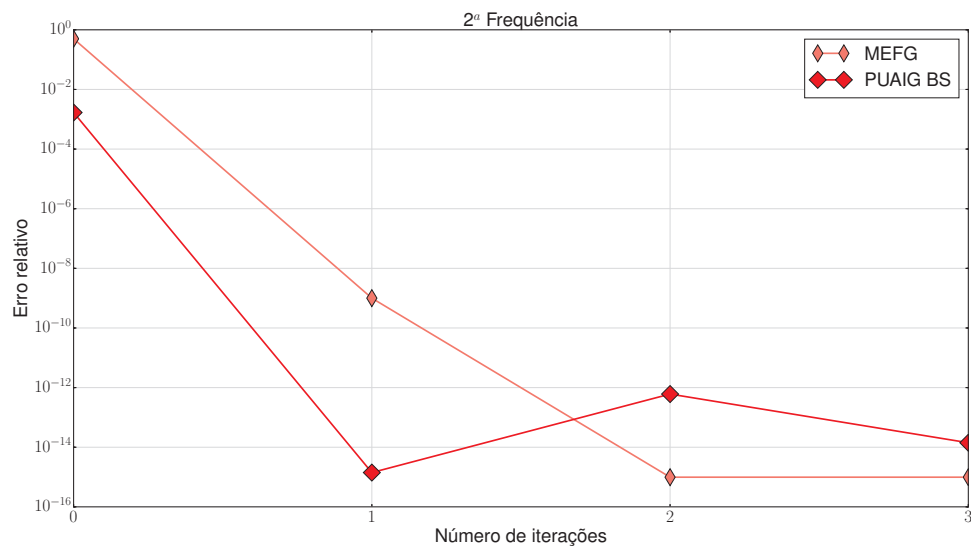


FIGURA 127 – ERRO RELATIVO DA 2<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO

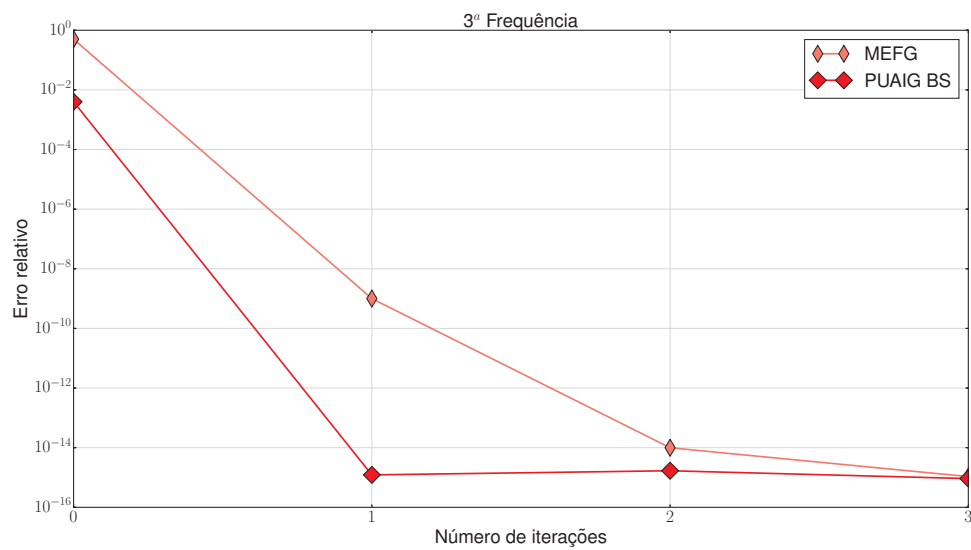


FIGURA 128 – ERRO RELATIVO DA 3<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO

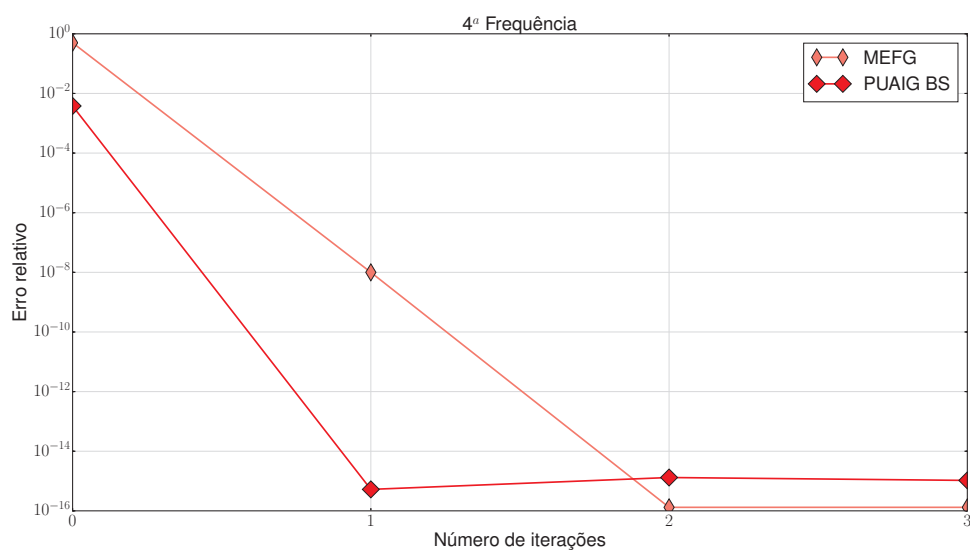


FIGURA 129 – ERRO RELATIVO DA 4ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO

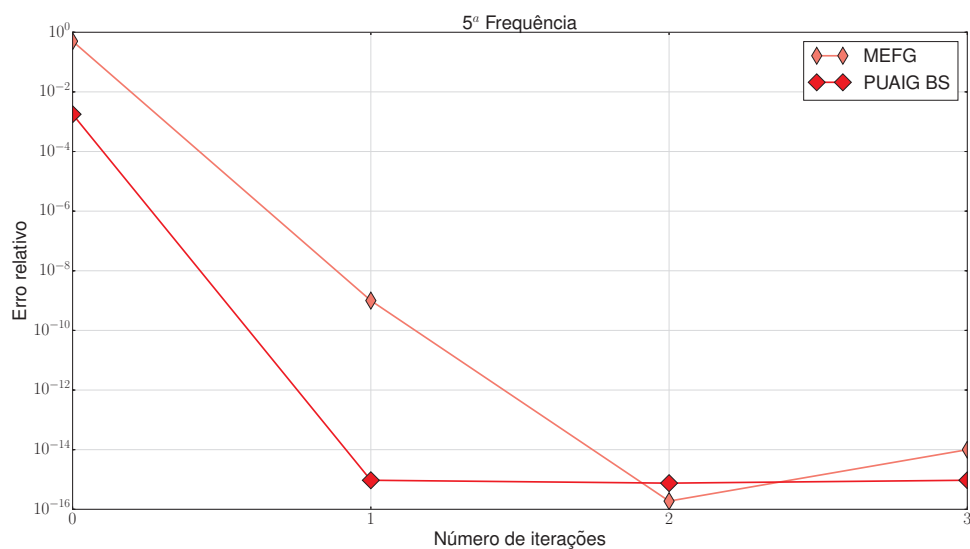


FIGURA 130 – ERRO RELATIVO DA 5ª FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO

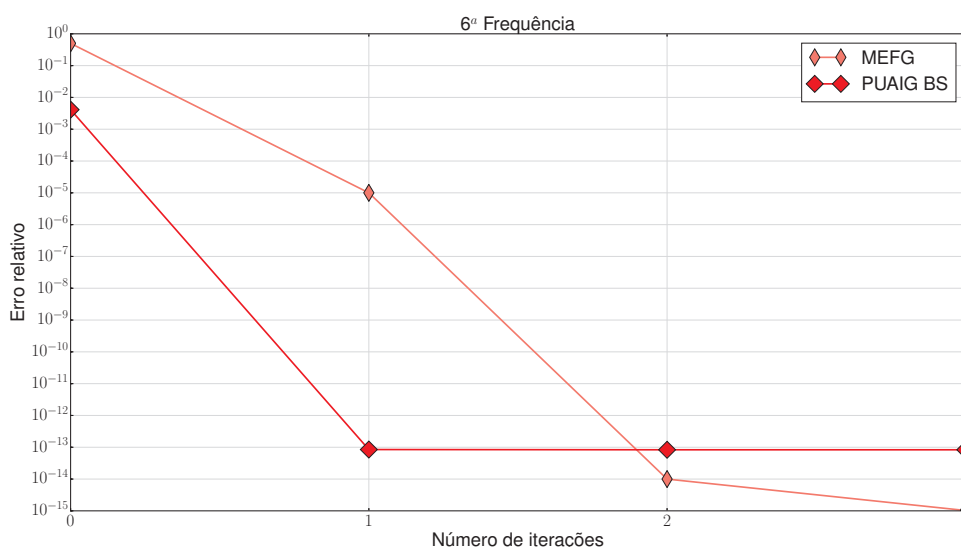


FIGURA 131 – ERRO RELATIVO DA 6<sup>A</sup> FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO DA BARRA HETEROGÊNEA PARA REFINAMENTO ADAPTATIVO

Na primeira frequência o refinamento adaptativo do MEFG ganha em termos de acurácia da PUAIG, sendo que os resultados ficam próximos apenas a partir da 3<sup>a</sup> iteração. Nas duas primeiras frequências é possível observar uma degeneração do resultado numérico da PUAIG entre a iteração 1 e 2. Contudo ao avançar para as frequências mais altas a PUAIG mostra-se estável e com convergência mais rápida a valores próximos da solução analítica quando comparada com o MEFG.

#### EXEMPLO 11 - TRELIÇA DE 15 BARRAS

A treliça de 15 barras, cujas dimensões e condições de apoio são mostradas na figura 132, é modelada através da PUAIG com sistema de construção análogo ao da treliça de 7 barras. O esquema de construção e acoplamento utilizado é mostrado em detalhes na figura 133. Os parâmetros de material da treliça de 15 barras são os mesmos utilizados na treliça de 7 barras, no exemplo anterior. Os resultados das seis primeiras frequências de vibração são mostrados através da tabela 14 para a PUAIG

com PU B-Splines e adaptativa. Comparativamente utiliza-se o MEF  $p$  desenvolvido por Cittadin (2017) e o MEFG adaptativo (ARNDT, 2009).

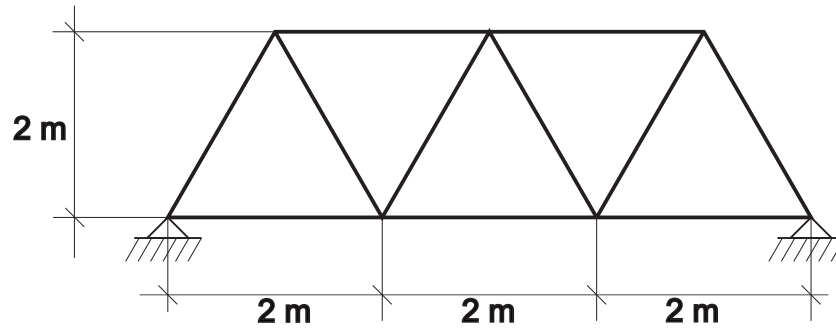


FIGURA 132 – TRELIÇA DE 15 BARRAS

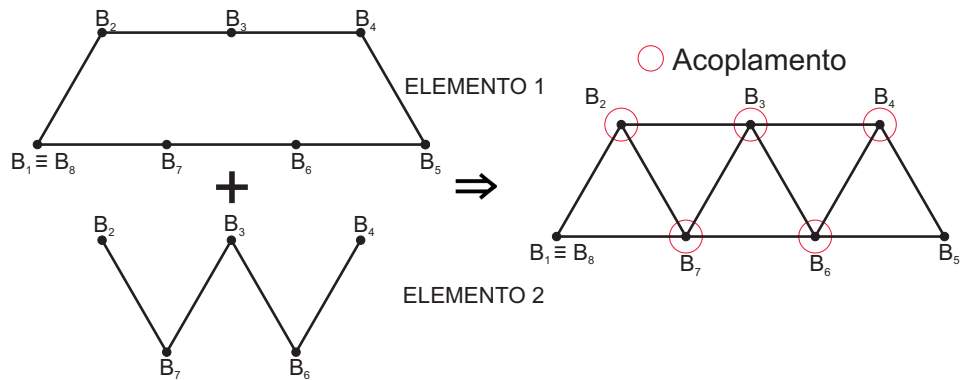


FIGURA 133 – ESQUEMA DE ACOPLAMENTO PARA TRELIÇA DE 15 BARRAS COM A PUAIG

TABELA 14 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO PARA A TRELIÇA DE 15 BARRAS

i	MEFG Adap <sup>1</sup> 162 gdl	MEF $p$ Grau 10 <sup>2</sup> 149 gdl	PUAIG BS 88 gdl	PUAIG Adap. 88 gdl
	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)	$\omega_i$ (rad/s)
1	679.786383	679.786398	679.786383	679.786383
2	1139.200586	1139.200577	1139.200592	1139.200585
3	1581.771367	1581.771368	1581.771368	1581.771366
4	2408.911573	2408.911558	2408.911637	2408.911573
5	2600.405466	2600.405465	2600.405784	2600.405468
6	2813.617278	2813.617278	2813.617381	2813.617278

<sup>1</sup> Arndt (2009)

<sup>2</sup> Cittadin (2017)

Os resultados da PUAIG adaptativa são melhores do que os apresentados pela PUAIG BS, onde a PUAIG Adaptativa, com apenas 88 graus de liberdade, compete muito bem com o MEFG adaptativo (162 graus de liberdade) e o MEF  $p$  (149 graus de liberdade), apresentando resultados idênticos ao MEFG em 3 frequências. As frequências do segundo e terceiro modo são ligeiramente mais precisas pela PUAIG Adaptativa. Contudo a PUAIG BS e adaptativa apresentam um número muito menor de graus de liberdade no problema da treliça de 15 barras, sendo, portanto mais eficiente por apresentar resultados muito similares com menor esforço computacional.

#### EXEMPLO 12 - BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE

Neste exemplo, a barra com as mesmas propriedades do experimento anterior é submetida a uma força constante, aplicada na extremidade livre, conforme a figura 64. Este problema possui solução analítica, dada por (NOWACKI, 1963):

$$u(x, t) = \frac{8f_0L}{\pi^2EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{1L}\right)\right) \right] \quad (202)$$

$$\dot{u}(x, t) = \frac{4f_0c}{\pi EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \left(\sin\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{1L}\right)\right) \right] \quad (203)$$

$$\ddot{u}(x, t) = \frac{2f_0c^2}{LEA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \left(\cos\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{1L}\right)\right) \right] \quad (204)$$

Neste exemplo a barra é dividida em dois elementos do tipo  $C^0$ , com grau

polinomial  $p = 2$  e inicialmente um único nível de enriquecimento  $\beta_1 = \pi$ . O método de Newmark é executado com tempo de análise  $t = 20s$  e passo de tempo  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-3}$ . As figuras 134, 135 e 136 mostram respectivamente o campo de deslocamentos, velocidades e acelerações com modelos desenvolvidos pelo MEF, a AIG e as versões da PUAIG, em comparação com a solução analítica. O ponto de análise é a extremidade livre a direita.

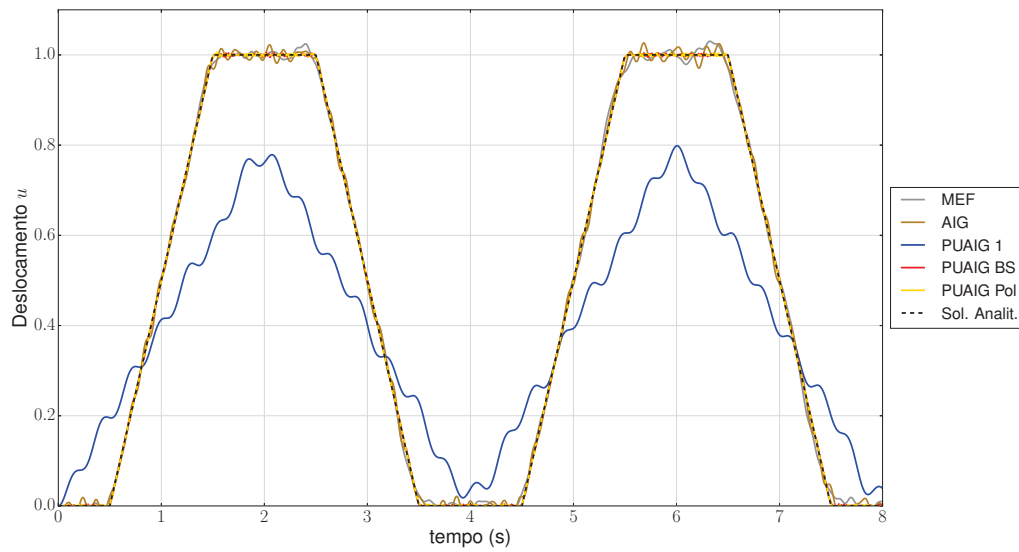


FIGURA 134 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE

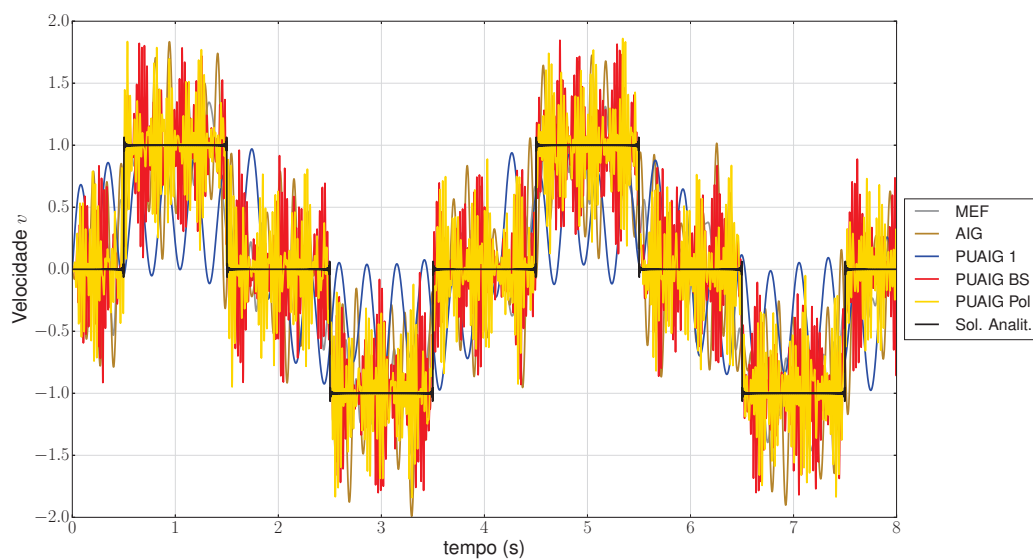


FIGURA 135 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE



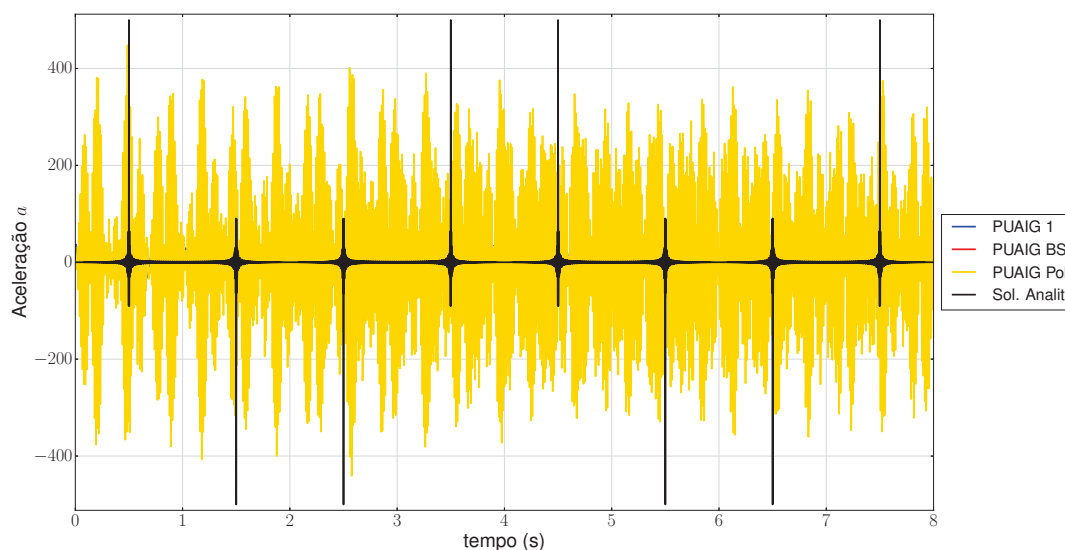


FIGURA 136 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE

É possível observar que praticamente todas as formas da PUAIG se adequam bem à solução analítica. Contudo as respostas de velocidades e acelerações mostram-se instáveis, ocorrendo oscilações acentuadas em torno da solução analítica. A tabela 15 mostra os erros acumulados para deslocamentos, velocidades e acelerações. Os resultados do MEFG foram obtidos por Debella (2018), com 4 elementos e 4 níveis de enriquecimento.

TABELA 15 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA

	AIG	MEF	MEFG <sup>1</sup>	PUAIG BS	PUAIG Pol	PUAIG 1
	20 gdl	21 gdl	69 gdl	12 gdl	12 gdl	10 gdl
u	0.19	0.29	0.036	0.029	0.027	3.67
v	7.36	4.56	0.009	5.14	4.93	10.12
a	362	176	0.604	1134	1245	170

<sup>1</sup> Debella (2018)

Os resultados mostrados na tabela 15 mostram que a PUAIG consegue obter melhores resultados que o MEFG, a AIG e o MEF no campo de deslocamentos com menos graus de liberdade, o que caracteriza um aspecto vantajoso neste

ponto. Contudo as velocidades e acelerações apresentadas pela PUAIG neste problema mostram-se mais instáveis do que os demais métodos testados. Os resultados MEFG para acelerações e velocidades são superiores a todos os métodos. O espectro da oscilação é mostrado na figura 137 onde há predominância do primeiro modo e pouca influência do segundo e terceiro modo.

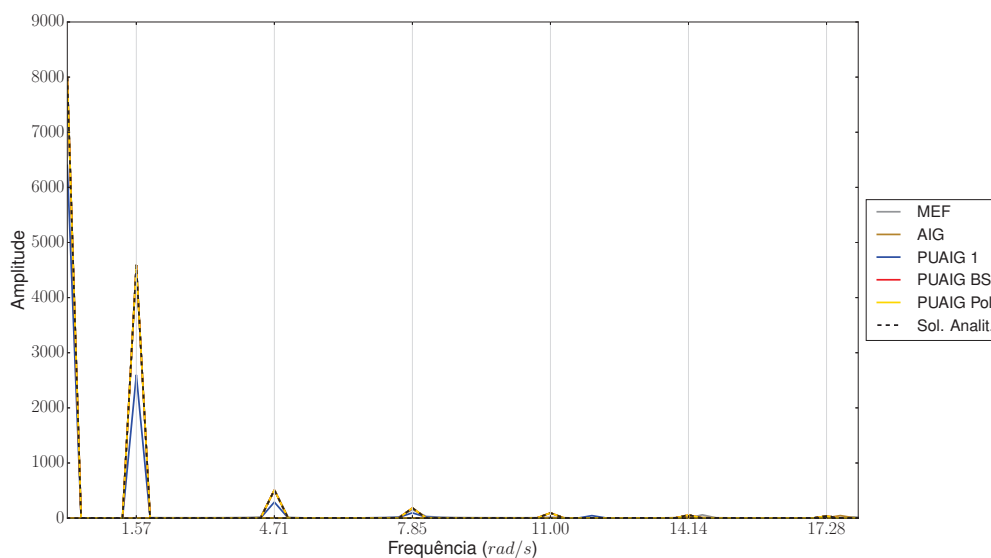


FIGURA 137 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES NA BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE

Com base na informação dos modos dominantes um novo modelo de PUAIG é testado com um enriquecimento correspondente aos 3 modos dominantes do problema. As figuras 138, 139, 140 mostram os deslocamentos, velocidades e acelerações da PUAIG com o enriquecimento adaptativo.

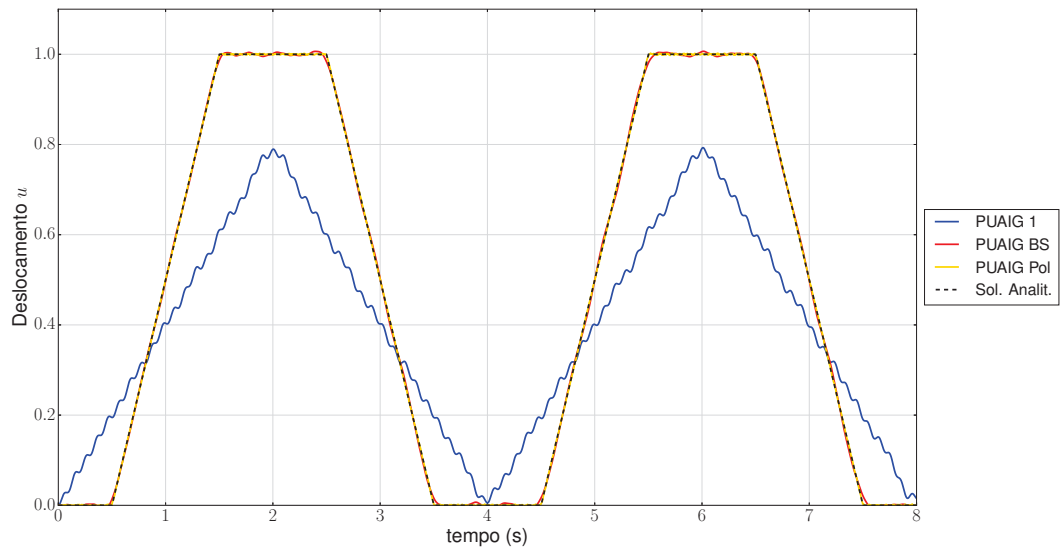


FIGURA 138 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A SEGUNDA ITERAÇÃO

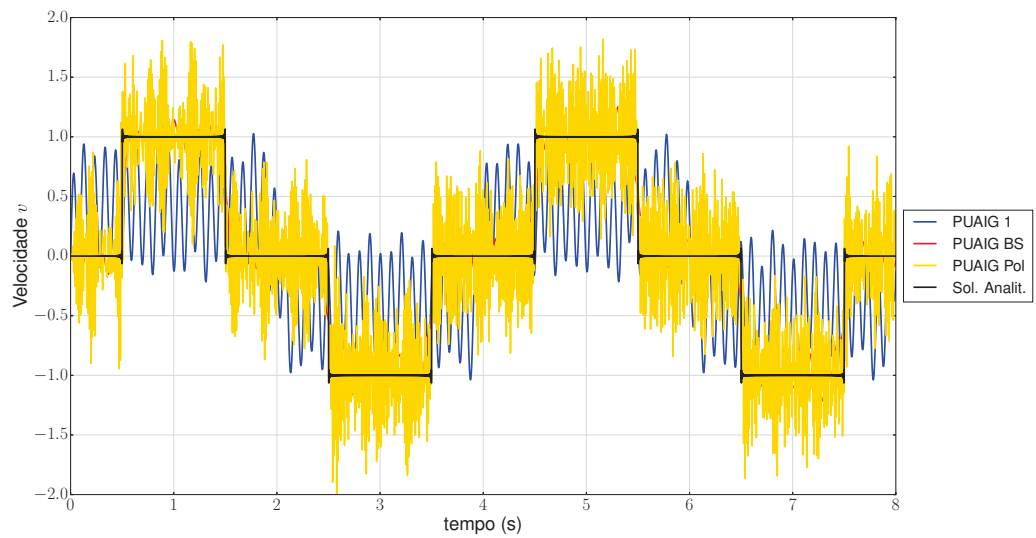


FIGURA 139 – VELOCIDADES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A SEGUNDA ITERAÇÃO

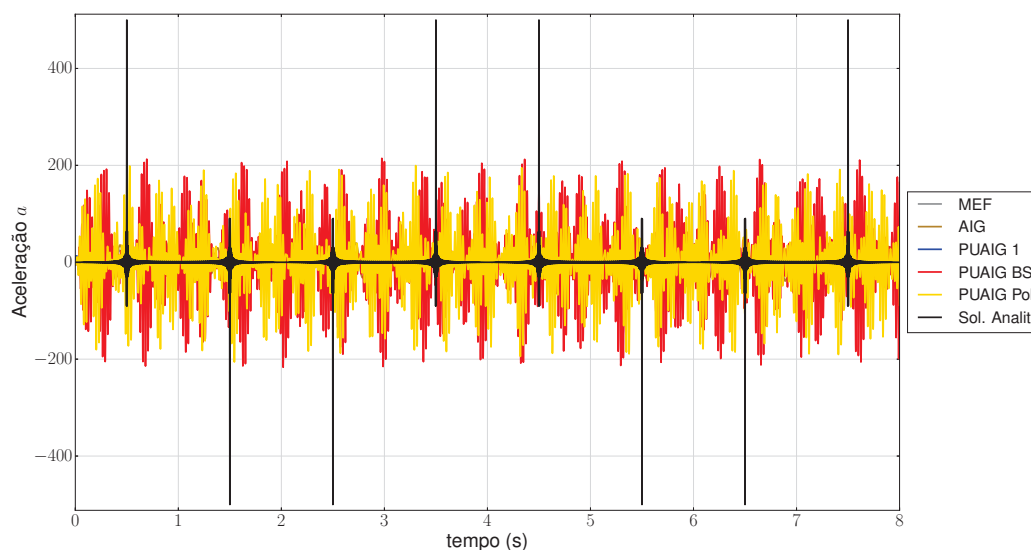


FIGURA 140 – ACELERAÇÕES PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA CONSTANTE PARA A SEGUNDA ITERAÇÃO

A figura 138 mostra uma atenuação no erro da PUAIG BS e PUAIG Polinomial, devido ao efeito da inserção de níveis de enriquecimento. Uma atenuação nas oscilações de velocidade e aceleração também é perceptível, mesmo que haja uma oscilação acentuada em torno da solução analítica nestes campos. A tabela 16 mostra os erros acumulados para deslocamentos, velocidades e acelerações. Neste processo adaptativo o aprimoramento no campo de velocidades e acelerações é mais notável, sendo que os deslocamentos obtiveram um ganho pequeno no erro. Novamente a PUAIG com PU Polinomial mostra-se a melhor formulação dentre das PUAIGs, contudo os resultados para o MEF para velocidades e acelerações neste problema mostram-se superiores.

TABELA 16 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA COM O PROCESSO ADAPTATIVO

	PUAIG BS	PUAIG Pol	PUAIG 1
	28 gdl	28 gdl	18 gdl
u	0.03	0.019	3.66
v	5.32	2.09	9.97
a	408.9	104.92	153.2

### EXEMPLO 13 - VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SUBMETIDA A CARREGAMENTO HARMÔNICO

Este experimento consiste em uma viga biapoiada, submetida a uma força harmônica localizada no meio do vão, com esquema similar ao da figura 90, com a força  $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$ , onde  $\omega$  é a frequência de excitação da força. Este problema possui solução analítica, desenvolvida por KoziéŃ (2013):

$$v(x, t) = \frac{2f_0}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \times \left[ \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sin(n\pi x), \quad (205)$$

onde  $\omega_n$  são as frequências naturais de vibração da viga simplesmente apoiada, dada pela equação 191. As expressões para velocidades e acelerações deste problema são obtidas neste trabalho por:

$$\dot{v}(x, t) = \frac{2f_0}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \times [\omega \cos(\omega t) - \omega \cos(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sin(n\pi x), \quad (206)$$

$$\ddot{v}(x, t) = \frac{2f_0}{\rho A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \times [-\omega^2 \sin(\omega t) + \omega \omega_n \sin(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sin(n\pi x). \quad (207)$$

O modelo é executado com parâmetros  $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$ ,  $\rho = 7800 kg/m^3$ ,  $A = 0.001 m^2$  e frequência de excitação  $\omega = 60 rad/s$ . O MEF é testado com 2 elementos cúbicos de Hermite, a AIG com grau  $p = 2$  e 8 funções B-Splines. A PUAIG é inicialmente testada com grau  $p = 2$  e um único elemento, com um nível de enriquecimento  $\beta_1 = \pi$ . Os resultados das oscilações são obtidos com o Método de Newmark, com  $t = 2s$  e passo de tempo  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4} s$ . A figura 141 mostra o campo de deslocamentos no ponto central, em comparação com a solução analítica.

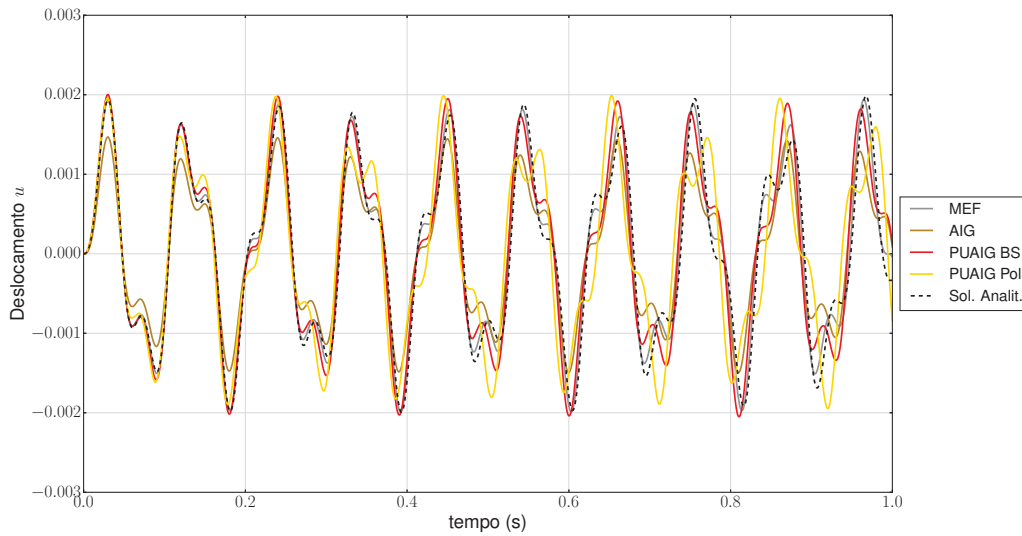


FIGURA 141 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA

Os resultados mostram que uma melhor aproximação da PUAIG à solução analítica do que a AIG, neste primeiro passo. A tabela 17 mostra os erros acumulados para o campo de deslocamentos no intervalo considerado.

TABELA 17 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA

AIG	MEF	PUAIG BS	PUAIG Pol
7 gdl	7 gdl	6 gdl	6 gdl
0.0001	0.0003	0.00026	0.00049

Os resultados mostram erros menores para a PUAIG BS. A figura 142 mostra o espectro de frequências da oscilação, sendo que as frequências dominantes são a correspondente ao primeiro modo e a própria frequência da fonte excitadora. O experimento com a PUAIG é repetido com a inserção dos parâmetros  $\beta_1 = 60rad/s$  e  $\beta_2 = 148rad/s$ . As figuras 143, 144 e 145 mostram os campos de deslocamentos, velocidades e acelerações com a PUAIG adaptativa.

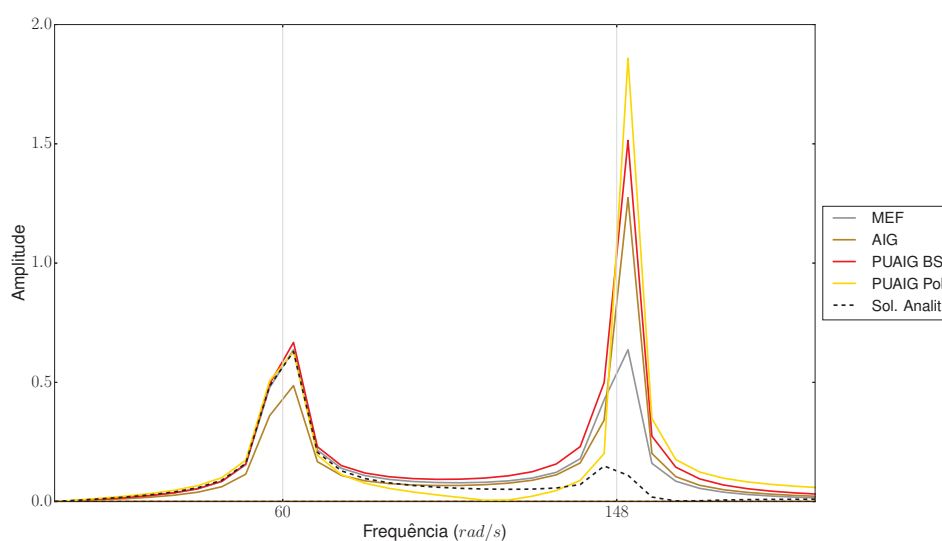


FIGURA 142 – FREQUÊNCIAS DOMINANTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA

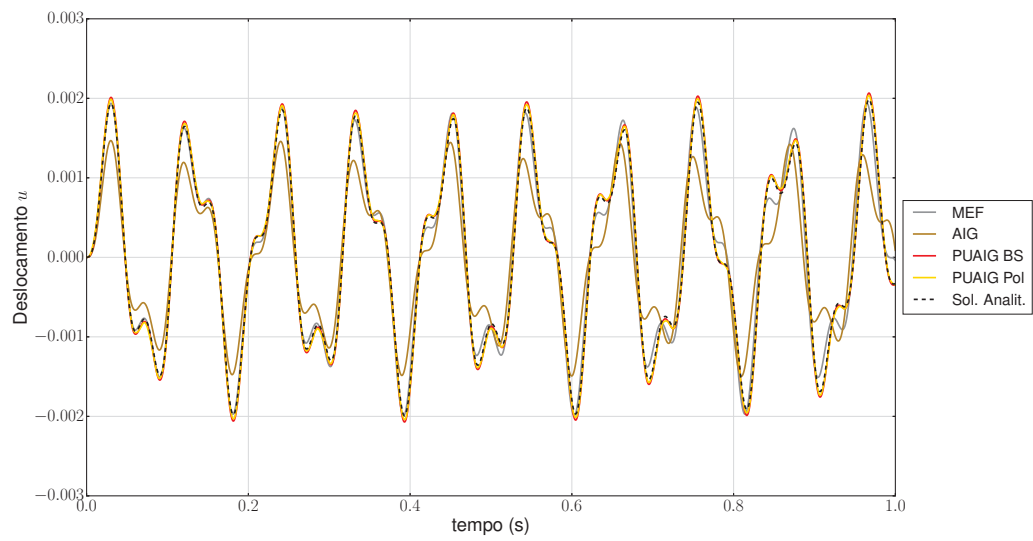


FIGURA 143 – DESLOCAMENTOS TRANSIENTES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA NA PUAIG ADAPTATIVA

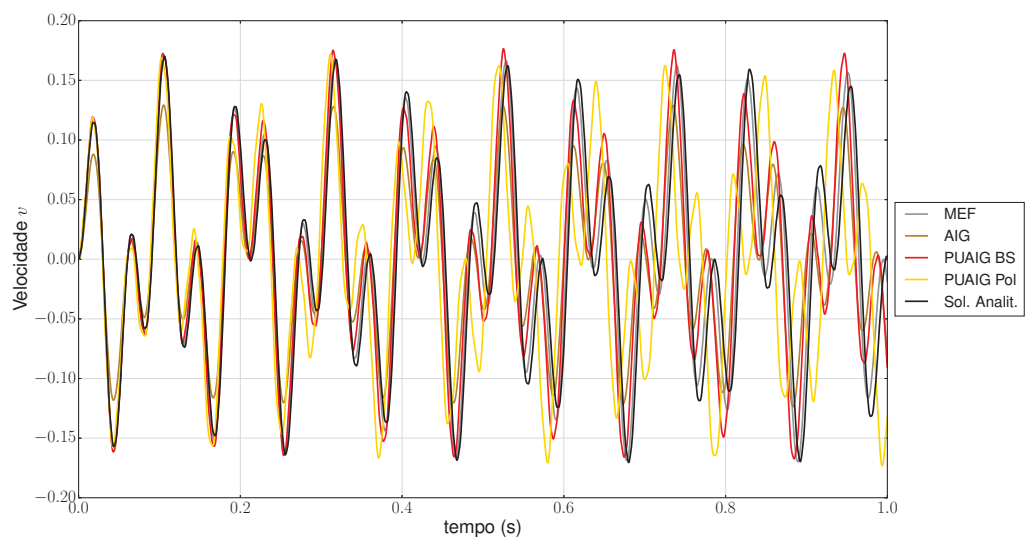


FIGURA 144 – VELOCIDADES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA NA PUAIG ADAPTATIVA



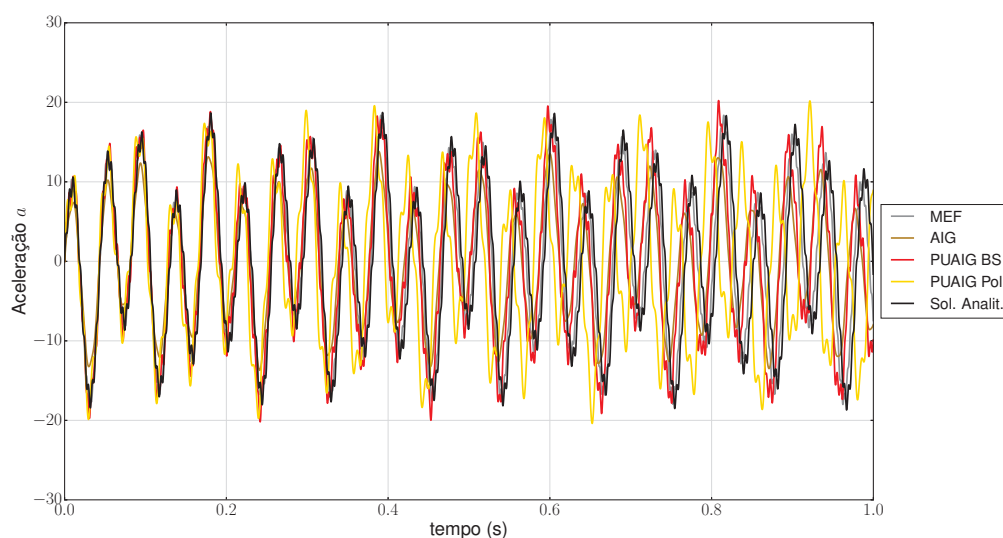


FIGURA 145 – ACELERAÇÕES PARA A VIGA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA NA PUAIG ADAPTATIVA

É possível visualizar uma melhor adequação da PUAIG com a solução analítica no período considerado. Os gráficos de velocidades e acelerações mostram uma boa aproximação à solução analítica, em especial a PUAIG. Os erros mostrados na tabela 18 confirmam a boa adequação da PUAIG com a metodologia de adaptatividade considerada. Neste modelo a PUAIG Polinomial ganha ligeiramente da BS em termos de deslocamento mas apresenta velocidades e acelerações com erros maiores, sendo portanto a PUAIG BS mais vantajosa neste caso.

TABELA 18 – ERRO ACUMULADO PARA A BARRA SUBMETIDA A FORÇA HARMÔNICA

	MEF 7 gdl	AIG 7 gdl	PUAIG BS 10 gdl	PUAIG Pol 10 gdl
$v$	$1 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-4}$	$3.7 \times 10^{-4}$	$3.3 \times 10^{-5}$
$\dot{v}$	0.3	0.84	0.057	0.066
$\ddot{v}$	49	122	16	36

#### EXEMPLO 14 - MEMBRANA CIRCULAR FIXA NAS EXTREMIDADES

A fim de testar o efeito do mapeamento da PUAIG em geometrias mais distorcidas este experimento consiste em uma membrana perfeitamente circular ilustrada através da figura 146, com raio  $R = 1m$ , fixa em toda sua borda externa. Este problema possui solução analítica, dada por (TIMOSHENKO, 1937):

$$\omega_{pn} = \frac{\alpha_{p,n}}{R} c, \quad (208)$$

onde  $\alpha_{p,n}$  é a  $n$ -ésima raiz não trivial da função de Bessel de grau  $p$ ,  $R$  é o raio e  $c$  a velocidade da onda. Estas raízes das funções de Bessel são extraídas nesse trabalho pelo pacote Scipy, da linguagem Python, que utiliza os algoritmos desenvolvidos por Zhang e Jin (1996). A formação da malha em AIG e PUAIG para este problema segue o modelo inicial detalhado em Cottrell, Bazilevs e Hughes (2009), e esquemas de refinamento para os pontos de controle dados por (PIEGL; TILLER, 1997). Utiliza-se grau polinomial  $p = 2$ , com 4 elementos  $C^0$  em  $\xi$  e 2 elementos  $C^0$  em  $\eta$ . Para o enriquecimento da PUAIG é utilizado 1 nível de enriquecimento local com parâmetro  $\beta_1 = \pi$ . A tabela 19 mostra as 20 primeiras frequências apresentadas pela AIG e PUAIG com diferentes PUs, em comparação com a solução analítica.

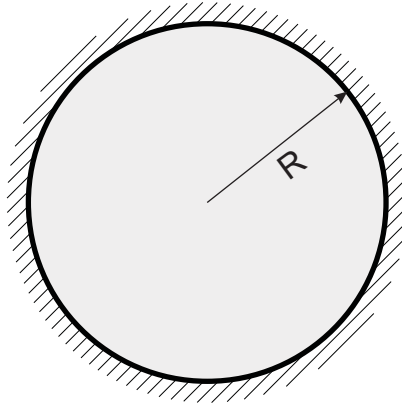


FIGURA 146 – MEMBRANA CIRCULAR FIXA NAS EXTREMIDADES

TABELA 19 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA ONDA CIRCULAR

Sol. Analítica	AIG	PUAIG BS	PUAIG Lin
-	118 gdl	105 gdl	121 gdl
2.40482556	2.40482548	2.40482556	2.40482556
3.83170597	3.83173364	3.83171069	3.8317112
5.1356223	5.13615635	5.13614281	5.1361075
5.52007811	5.52155709	5.52026101	5.52023081
6.3801619	6.38165941	6.38160252	6.38110851
7.01558667	7.01972339	7.01600688	7.01617744
7.58834243	7.61414412	7.61358846	7.60359942
8.41724414	8.44267922	8.44371184	8.4422314
8.65372791	8.68763322	8.65994957	8.65939001
8.77148382	8.86924425	8.86898142	8.83011209
9.76102313	9.5444248	9.54698439	9.52858346
9.93610952	9.9635505	9.96280233	9.9668218
10.17346814	10.10866298	10.11198463	10.11306397
11.06470949	11.20096201	11.01327406	11.04187921
11.08637002	11.52915039	11.20536013	11.15595182

A tabela 19 mostra uma característica vantajosa da PUAIG e uma importante conclusão sobre o seu processo de mapeamento: como a primeira frequência dos problemas com a PUAIG são iguais a solução analítica, demonstra-se experimentalmente que um mapeamento a partir de um domínio quadrado no espaço paramétrico com uma função de enriquecimento analítica leva para a solução analítica no espaço físico com 8 dígitos significativos, mesmo este sendo uma geometria mais complexa. É possível observar que a segunda frequência também apresenta valores próximos da solução analítica. A solução começa de apresentar erros mais acentuados a partir da 7<sup>a</sup> frequência onde estes erros começam a se propagar no segundo dígito decimal.